Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Akademska 2014/2015.

Sadržaj sveske sa vježbi iz predmeta
Inžinjerska matematika III

Literatura za dodatno spremanje ispita:
• H. Fatkić, V. Dragičević;Diferencijalni račun funkcija dviju i više promjenjivih, Svjetlost, Sarajevo 1990
• F. Čunjalo; Uvod u teoriju vjerovatnoće sa rješenim zadacima; Sarajevo 2013
• H.Fatkić; Vjerovatnoća i statistika, I . dio, Corons, Sarajevo, 2000
• S. Gilezan, Lj. Nedović, Z. Lužanin, Z. Ovcin, T. Grbić, J. Ivetić, B. Mihailović, K. Doroslovački; Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike; Novi Sad, 2009. godine
• T. Pejović; Diferencijalne jednačine II – obične diferencijalne jednačine višeg reda i sistemi jednačina, 4 izdanje, Univerzitet u Beogradu
• V. Perić; M. Tomić, P. Karačić, Zbirka riješenih zadataka iz Matematike II, IP Svjetlost, Sarajevo 1991
• T. Subašić; Vjerovatnoća i matematička statistika – zbirka rješenih zadataka, Zenica 2007
• N. Elezović; Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija; Element 2006

Dio tablice izvoda

1) $(c)' = 0$;
2) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;
3) $(uv)' = u'v + v'u$;
3a) $(cu)' = cu'$;
4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;
4a) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$;
4б) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
5) $(x^n)' = nx^{n-1}$;
6) $(\sin x)' = \cos x$;
7) $(\cos x)' = -\sin x$;
8) $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$;
9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

5) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$;
8) $(\operatorname{tg} u)' = \sec^2 u \cdot u'$;
6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$.
7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

10) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;
11) $(\log u)' = \frac{u'}{u} \log e$;
10a) $(e^u)' = e^u u'$;
11a) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;
10б) $(a^x)' = a^x \ln a$;
11б) $(\log x)' = \frac{1}{x} \log e$;
10в) $(e^x)' = e^x$;
11в) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

12) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
12a) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
13a) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14) $(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;
14a) $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
15) $(\operatorname{arc\,ctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$;
15a) $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Dio tablice integrala

1. $\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1.$

2. $\int u^{-1}\,du = \int \frac{du}{u} = \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C.$

3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C;\ \int e^u\,du = e^u + C.$

4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$

5. $\int \cos u\,du = \sin u + C.$

6. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C.$

7. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{ctg} u + C.$

8. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C.$

9. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a}\right| + C.$

Sistem linearnih diferencijalnih jednačina

Sistem linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnom obliku je sistem

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x)\\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21}(x)y_1 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x)\\
&\vdots\\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)
\end{aligned} \qquad \ldots(1)$$

pri čemu su $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$ f-je po promjenjivoj x.

Uvedimo oznake

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad Y' = \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}(x)]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Tada se sistem (1) može napisati u obliku

$$\frac{dY}{dx} = AY + B.$$

Ako je $b_j = 0$ (za $j = 1, 2, \ldots, n$) tada se dati sistem naziva homogen sistem

$$\frac{dY}{dx} = AY.$$

U lekcijama koje slijede mi ćemo razmatrati sisteme sa konstantnim koeficijentima. Ove sisteme možemo rješiti nekom od sljedećih metoda:

1. Metoda svođenja sistema na jednu difer. jednačinu višeg reda
2. Ojlerova metoda za rješavanje homogenog sistema
3. Metod varijacije konstanti
4. Metod prvih integrala sistema
5. Metod nalaženjem partikularnog rješenja
6. Primjenom Laplasovih transformacija
7. Korištenjem spektralnih projektora iz Linearne algebre

U lekcijama koje slijede detaljno ćemo obraditi prvu, drugu, treću i petu metodu.

Svođenje sistema na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda

U MATEMATICI II, smo razmatrali diferencijalne jednačine koje uključuju samo dvije varijable. U ovoj lekciji razmatraćemo diferencijalne jednačine koje uključuju više od dvije varijable. Ako je samo jedna varijabla linearno nezavisna, data jednačina je obična diferencijalna jednačina; ako je više varijabli nezavisno, jednačina se naziva parcijalna diferencijalna jednačina. U ovoj lekciji ćemo razmatrati sistem običnih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima kao što su

$$(A)\begin{cases} 2\dot{x}+\dot{y}-4x-y=e^t \\ \dot{x}+3x+y=0 \end{cases} \iff (A')\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-4x-y=e^t \\ \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff (A'')\begin{cases} 2x'(t)+y'(t)-4x(t)-y(t)=e^t \\ x'(t)+3x(t)+y(t)=0 \end{cases} \iff (A''')\begin{cases} (2D-4)x+(D-1)y=e^t \\ (D+3)x+y=0 \end{cases}$$

gdje je $D=\dfrac{d}{dt}$.

i

$$(B)\begin{cases} \dot{x}+\dot{y}+y=1 \\ \dot{x}-\dot{z}+2x+z=1 \\ \dot{y}+\dot{z}+y+2z=0 \end{cases} \iff (B')\begin{cases} Dx+(D+1)y=1 \\ (D+2)x-(D-1)z=1 \\ (D+1)y+(D+2)z=0 \end{cases}$$

U procesu rješavanja sistema diferencijalnih jednačina, skoro uvijek ćemo naići na linearnu diferencijalnu jednačinu višeg reda sa konstantnim koeficijentima čiji proces rješavanja nam je poznat iz Matematike II. Da bi smo ponovili kako riješiti ove diferencijalne jednačine, Metodom neodređenih koeficijenata ćemo riješiti sljedeće primjere:

(a) $x''+x=-e^t$ gdje je $x=x(t)$.

(b) $(D^2+1)y=4e^t$ (gdje je $D=\dfrac{d}{dt}$)

(c) $x''(t)+4x'(t)-5x(t)=-6e^{2t}$

(d) $y''(t)+4y'(t)-5y(t)=14-30t$

(e) $(D^2-4D+3)x=-2e^t-3e^{4t}$ (gdje je $D=\dfrac{d}{dt}$)

(f) $(D-1)(D-2)(D-3)y=0$ (gdje je $D=\dfrac{d}{dt}$).

Ove jednačine ćemo riješiti na času (vidi DODATAK u ovoj svesci) a ovdje ćemo samo napisati njihova rješenja:

a) $x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}e^t$

b) $y(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+2e^t$

c) $x(t)=C_1e^t+C_2e^{-5t}-\frac{6}{7}e^{2t}$

d) $y(t)=C_1e^{-5t}+C_2e^t+6t+2$

e) $x(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+te^t-e^{4t}$

f) $y(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$

OSNOVNA PROCEDURA za rješavanje sistema od n običnih diferencijalnih jednačina po n zavisnih varijabli sastoji se u dobijanju, pomoću diferenciranja datih jednačina, skupa u kojem se sve osim jedne zavisne varijable, recimo x, mogu eliminisati. Jednačina koja se dobije kao rezultat ove eliminacije se tada riješi po toj varijabli x. Svaka od zavisnih varijabli se dobije na sličan način.

Primjer Posmatrajmo sistem

$$2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-4x-y=e^t \quad \ldots (I)$$

$$\frac{dx}{dt}+3x+y=0 \quad \ldots (II)$$

Rješenje 1:

Prvo primjetimo da opšte rješenje $x=x(t)$, $y=y(t)$ ovog sistema također zadovoljava

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0 \quad \ldots (III)$$

što smo dobili diferencirajući jednačinu (II). Štaviše, množeći (I) sa (-1), (II) sa (-1), (III) sa 1 i sabirajući ih dobijamo

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=-e^t \quad \ldots (IV)$$

što je također zadovoljeno sa $x=x(t)$, $y=y(t)$. Ova zadnja diferencijalna jednačina, koja ne sadrži ni y ni njegove izvode, se može lagano riješiti; time

KAKO?

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}e^t$$

Da bi odredili y možemo postupiti na sličan način, tj. diferencirati (I) da bi dobili

$$2\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=e^t$$

i onda razmatrati jednačine (I), (II), (III) eliminisati x i njegove izvode. Međutim mnogo jednostavnija procedura je sljedeća. Iz (II) imamo

$$y=-\frac{dx}{dt}-3x=-\left(-C_1\sin t+C_2\cos t-\frac{1}{2}t\right)-3\left(C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}e^t\right)$$

$$=(C_1-3C_2)\sin t-(3C_1+C_2)\cos t+2e^t$$

Prema tome

$$\begin{cases} x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}e^t \\ y(t)=(C_1-3C_2)\sin t-(3C_1+C_2)\cos t+2e^t \end{cases}$$

je opšte rješenje datog sistema.

Kada se jednačine napišu u D oznaci $\left(D=\frac{d}{dt}\right)$, postoji velika sličnost u proceduri koji ćemo koristiti u rješenju 2 i koju smo koristili u metodi rješavanju sistema od n jednačina po n nepoznatih. Ovo dugujemo činjenici da kada su u pitanju jednačine sa konstantnim koeficijentima, operator D možemo tumačiti kao varijablu (slovo).

Rješenje 2:

Dati sistem

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t$$
$$\frac{dx}{dt} \qquad + 3x + y = 0$$

možemo napisati u obliku

$$2(D-2)x + (D-1)y = e^t \qquad \dots(I)$$
$$(D+3)x + \qquad y = 0 \qquad \dots(II)$$

gdje je $D = \frac{d}{dt}$.

Sada možemo nastaviti kao da imamo dvije jednačine sa dvije nepoznate x i y, množeći (II) sa $(D-1)$. Tačnije na (II) mi primjenjujemo diferencijalni operator $D-1 = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)$ i dobijamo

$$(D-1)(D+3)x + (D-1)y = 0 \qquad \dots(*).$$

Ako oduzmemo (I) od (*) imamo

$$\big((D-1)(D+3) - 2(D-2)\big)x = e^t \quad \text{ili} \quad (D^2+1)x = -e^t.$$

Sada ovo je isto kao i (IV) iz rješenja 1 kao što smo i očekivali, zato što primjenjujući na (II) operator $D-1$ je ekvivalentno diferencirajući (II) i dodajući mu $(-1)(II)$, kao u prethodnom rješenju. Opšte rješenje se dobije na potpuno isti način kao u rješenju 1.

Rješenje 3:

Također možemo odrediti rješenje koristeći determinante (prisjetimo se gradiva iz Matematike 1 - rješavanje sistema linearnih jednačina metodom determinanti). Iz sistema

$$2(D-2)x + (D-1)y = e^t$$
$$(D+3)x + \qquad y = 0$$

imamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{i} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}}$$

ili $\quad (D^2+1)x = -e^t \quad$ i $\quad (D^2+1)y = 4e^t$

Prva jednačina je ista kao i (IV) iznad, a drugu smo dobili u proceduri koju smo odbacili u rješenju 1. Sada ćemo pokazati zašto smo je odbacili. Kada se dvije jednačine riješe (KAKO? - npr. metoda neodređenih koeficijenata) imamo

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2}e^t \qquad \dots(VI)$$
$$y(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t + 2e^t \qquad \dots(VII)$$

Prema rješenju 1 znamo da (VI) i (VII) sadrže previše proizvoljnih konstanti. Da bi ih eliminisali uvrstiti ćemo ih u (II) i dobiti

$$(C_2+3C_1+C_3)\cos t+(3C_2-C_1+C_4)\sin t=0$$

za svaku vrijednost od t. Prema tome

$$C_3=-(3C_1+C_2) \quad i \quad C_4=C_1-3C_2$$

kada se ove vrijednosti zamjene u (VI) i (VII) dobićemo isto opšte rješenje koje smo već odredili ranije.

<u>BROJ NEZAVISNIH PROIZVOLJNIH KONSTANTI</u> koje se pojavljuju u opštem rješenju sistema

$$f_1(D)\,x+g_1(D)\,y=h_1(t)$$
$$f_2(D)\,x+g_2(D)\,y=h_2(t)$$

je jednak stepenu u D determinante $\Delta=\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D)\end{vmatrix}$

što vrijedi ako Δ nije identički jednaka nuli. Ako je $\Delta\equiv 0$ sistem je zavisan; takve sisteme mi nećemo razmatrati ovdje.

Za dati sistem (A), $\Delta=\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1\end{vmatrix}=-(D^2+1)$

Stepen 2 u D se slaže sa brojem proizvoljnih konstanti koje se pojavljuju u opštem rješenju.

Ista teorema se može proširiti za slučaj kada imamo n jednačina sa n nezavisnih varijabli.

\# Pokazati da je operator $(D+1)(D+3)$ isti kao i D^2+4D+3. $\left(D=\frac{d}{dt}\right)$.

Rj. Za dva puta diferencijabilnu f-ju $y(t)$ imamo

$$y'(t)=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}y=Dy$$

(simbol D koristimo umjesto $\frac{d}{dt}$).

$$(D+1)(D+3)[y]=(D+1)\Big((D+3)[y]\Big)=(D+1)[y'+3y]$$
$$=D[y'+3y]+1[y'+3y]=(y''+3y')+(y'+3y)$$
$$=y''+4y'+3y=(D^2+4D+3)[y].$$

Prema tome $(D+1)(D+3)=D^2+4D+3$.

Pokazati da operator $(D+3t)D$ nije isti kao i $D(D+3t)$.

Rj. $y'(t)=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}y=Dy$, simbol D koristimo umjesto $\frac{d}{dt}$.

Neka je $y(t)$ dva puta diferencijabilna f-ja

$$(D+3t)D[y]=(D+3t)[y']=y''+3ty'$$

$$D(D+3t)[y]=D[y'+3ty]=y''+3y+3ty'$$

Prema tome operatori nisu isti.

Napomena: Kako koeficijent $3t$ nije konstanta, on prekida vezu diferencijalnog operatora D sa fjom $y(t)$. Međutim doble pod imamo izraze oblika aD^2+bD+c gdje su a, b i c konstante, za "algebru" diferencijalnih operatora vrijede ista pravila kao za algebru polinoma.

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x}+\dot{y}=x+2t+1$$
$$2\dot{x}+2\dot{y}=-x+t$$

Rj. Prvo napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d}{dt}x+\frac{d}{dt}y=x+2t+1$$
$$2\frac{d}{dt}x+2\frac{d}{dt}y=-x+t$$

uvedimo oznaku $D=\frac{d}{dt}$

$$(D-1)[x]+D[y]=2t+1 \quad \ldots(I)$$
$$(2D+1)[x]+2D[y]=t \quad \ldots(II)$$

Eliminišimo fju y:

$$(II)-2\cdot(I):\quad ((2D+1)-(2D-2))[x]=-3t-2$$

$$3x=-3t-2 \quad /:3$$

$$x=-t-\frac{2}{3}$$

$$(D-1)[x]=-1+t+\frac{2}{3}=t-\frac{1}{3} \overset{(I)}{\Longrightarrow} y'=t+\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t+C_1$$

Rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t)=-t-\frac{2}{3} \\ y(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t+C_1 \end{cases}$$

Kako je $\begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+1 & 2D \end{vmatrix}$ stepena 1 po D to postoji samo jedna proizvoljna konstanta.

(#) Riješiti sistem

$$\dot{x} = -2x - 3y$$
$$\dot{y} = -3x - 2y + 2e^{2t}$$

Rj. Napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d}{dt}x = -2x - 3y$$
$$\frac{d}{dt}y = -3x - 2y + 2e^{2t}$$

Ako uvedemo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ imamo

$$(D+2)x + 3y = 0 \quad \ldots(I) \quad /(D+2)$$
$$3x + (D+2)y = 2e^{2t} \quad \ldots(II) \quad /3$$

Rješimo se y-na:

$$(D+2)^2 x + 3(D+2)y = 0$$
$$-\quad 9x + 3(D+2)y = 6e^{2t}$$
$$(D^2 + 4D - 5)x = -6e^{2t} \quad \ldots(III)$$

Jednačina (III) je linearna jednačina drugog reda po x sa konstantnim koeficijentima - njezino opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata.

$$x = x_h + x_p$$

kar. jedn. $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0 \Rightarrow x_h = C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t}$$

$$x_p = Ae^{2t}$$
$$x_p' = 2Ae^{2t} \qquad x_p'' + 4x_p' - 5x_p = (4A + 8A - 5A)e^{2t} = -6e^{2t}$$
$$x_p'' = 4Ae^{2t} \qquad 7A = -6 \Rightarrow A = -\frac{6}{7}$$

$$x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t}$$

Prva jednačina iz sistema je $\dot{x} = -2x - 3y$ tj.

$$-3y = \dot{x} + 2x \quad /\cdot(-3)$$
$$y = -\frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}x$$
$$y = -\frac{1}{3}\left(C_1e^{t} - 5C_2e^{-5t} - \frac{12}{7}e^{2t}\right) - \frac{2}{3}C_1e^{t} - \frac{2}{3}C_2e^{-5t} + \frac{4}{7}e^{2t}$$
$$y = -C_1e^{t} + C_2e^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t}$$

Rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{t} + C_2e^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t} \\ y(t) = -C_1e^{t} + C_2e^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t} \end{cases}$$

(#) Riješiti sistem
$$x'(t) = 3x(t) - 4y(t) + 1$$
$$y'(t) = 4x(t) - 7y(t) + 10t$$

Rj. Uvedimo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ i napišimo sistem u operator oznakama

$$\begin{array}{l} x' = 3x - 4y + 1 \\ y' = 4x - 7y + 10t \\ \hline x' - 3x + 4y = 1 \\ -4x + y' + 7y = 10t \\ \hline (D-3)[x] + 4y = 1 \quad \ldots (I) \\ -4x + (D+7)[y] = 10t \quad \ldots (II) \\ \hline \end{array}$$

Eliminišimo f-ju $x(t)$ iz sistema

$$\begin{array}{ll} 4\cdot(I): & 4(D-3)[x] + 16y = 4 \\ (D-3)\cdot(II): & + \; (D-3)\cdot(-4)[x] + (D-3)(D+7)[y] = 10(D-3)[t] \\ \hline & (16 + (D-3)(D+7))[y] = \underbrace{4 + (D-3)[10t]}_{4+10-30t} \end{array}$$

$$(D^2 + 4D - 5)[y] = 14 - 30t \quad \ldots (III)$$

Jednačina (III) je linearna jednačina drugog reda po y sa konstantnim koeficijentima - opšte rješenje je oblika $y = y_h + y_p$ (METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA)

kar. jedn. $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0 \Rightarrow y_h = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t}$

$$\left.\begin{array}{l} y_p = At + B \\ y_p' = A, \; y_p'' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_p'' + 4y_p' - 5y_p = 4A - 5At - 5B = 14 - 30t$$

$$\begin{array}{l} -5A = -30 \\ 4A - 5B = 14 \\ \hline A = 6 \\ B = 2 \end{array}$$

Opšte rješenje jednačine (III) je $y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{t} + 6t + 2$ ... (*)

F-ju $x(t)$ možemo odrediti na dva načina

<u>I način</u>

Vratimo se u početni sistem i eliminišimo $y(t)$

$$\begin{array}{l} x' = 3x - 4y + 1 \\ y' = 4x - 7y + 10t \\ \hline (D-3)[x] + 4y = 1 \quad \ldots (IV) \\ -4x + (D+7)[y] = 10t \quad \ldots (V) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (D+7)\cdot(IV): & (D+7)(D-3)[x] + 4(D+7)[y] = (D+7)[1] \\ (-4)\cdot(V): & + \; 16x - 4(D+7)[y] = -40t \\ \hline & (16 + (D+7)(D-3))[x] = 7 - 40t \\ & (D^2 + 4D - 5)[x] = 7 - 40t \quad \ldots (VI) \end{array}$$

Jednačina (VI) je linearna jednačina drugog reda po x sa konstantnim koeficijentima - njeno rješenje možemo odrediti metodom neodređenih koeficijenata $y = y_h + y_p$

$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

$(\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow y_h = K_1 e^{-5t} + K_2 e^{t}$

$y_p = At + B$

$y_p' = A, \; y_p'' = 0 \; \ldots \; A = 8, \; B = 5$

Opšte rješenje jednačine (VI) je
$$x(t) = K_1 e^{-5t} + K_2 e^{t} + 8t + 5 \quad \ldots (**)$$
gdje su K_1 i K_2 proizvoljne konstante (koje ne moraju biti iste kao C_1 i C_2).

Kako u sistemu imamo dvije jednačine prvog reda, razumno je očekivati da njegovo rješenje uključuje samo dvije proizvoljne konstante. Time, četiri konstante C_1, C_2, K_1 i K_2 nisu nezavisne. Da bi odredili njihovu međusobnu relaciju, zamijenićemo izraze za $x(t)$ i $y(t)$ date u $(*)$ i $(**)$ u jednu od jednačina iz sistema, recimo u prvu.

$$x'(t) = 3x(t) - 4y(t) + 1$$

$$(**) \Rightarrow \quad x(t) = K_1 e^{-5t} + K_2 e^t + 8t + 5 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x'(t) = -5K_1 e^{-5t} + K_2 e^t + 8$$

pa imamo

$$-5K_1 e^{-5t} + K_2 e^t + 8 = 3K_1 e^{-5t} + 3K_2 e^t + \cancel{24t} + 15 - 4C_1 e^{-5t} - 4C_2 e^t - \cancel{24t} - 8 + 1$$

$$\Rightarrow \quad (4C_1 - 8K_1) e^{-5t} + (4C_2 - 2K_2) e^t = 0$$

Kako su e^t i e^{-5t} linearno nezavisne f-je na bilo kojem intervalu, zadnja jednakost vrijedi za sve t samo ako

$$4C_1 - 8K_1 = 0 \quad i \quad 4C_2 - 2K_2 = 0$$

tj.

$$K_1 = \frac{1}{2} C_1 \quad i \quad K_2 = 2C_2$$

Rješenje datog sistema je

$$x(t) = \frac{1}{2} C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^t + 8t + 5$$
$$y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^t + 6t + 2$$

traženo opšte rješenje

II način

Puno jednostavnija metoda za određivanje $x(t)$ jednom kada je $y(t)$ poznato je da iskoristimo sistem i da dobijemo jednačinu za $x(t)$ po članovima od $y(t)$ i $y'(t)$.

$$x'(t) = 3x(t) - 4y(t) + 1$$
$$y'(t) = 4x(t) - 7y(t) + 10t \quad \ldots (1)$$

$$y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^t + 6t + 2 \quad \ldots (2)$$

$$(1) \Rightarrow \quad 4x(t) = y'(t) + 7y(t) - 10t \quad /:4$$

$$x(t) = \frac{1}{4} y'(t) + \frac{7}{4} y(t) - \frac{5}{2} t \quad \ldots (3)$$

Uvrstimo (2) u (3)

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(-5C_1 e^{-5t} + C_2 e^t + 6\right) + \frac{7}{4}\left(C_1 e^{-5t} + C_2 e^t + 6t + 2\right) - \frac{5}{2} t$$
$$= \frac{1}{2} C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^t + 8t + 5$$

Pa je opšte rješenje sistema

$$x(t) = \frac{1}{2} C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^t + 8t + 5$$
$$y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^t + 6t + 2$$

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = 2x + y + 2e^{t}$$
$$\dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}$$

Rj: Sistem ćemo riješiti na dva načina

I način

Napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{dx}{dt} - 2x - y = 2e^{t}$$
$$\frac{dy}{dt} - 2y - x = -3e^{4t}$$

uvedimo oznaku $\frac{d}{dt} = D$

$$(D-2)x - y = 2e^{t} \quad / \cdot (D-2)$$
$$-x + (D-2)y = -3e^{4t}$$

$$\boxed{(D-2)(2e^{t}) = 2e^{t} - 4e^{t} = -2e^{t}}$$

$$(D-2)^2 x - (D-2)y = -2e^{t}$$
$$+ \quad -x + (D-2)y = -3e^{4t}$$

$$(D^2 - 4D + 3)x = -2e^{t} - 3e^{4t} \quad \dots (*)$$

Dobili smo linearnu jednačinu drugog reda po x sa konstantnim koeficijentima - njezino opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata.

$x = x_p + x_h$ - opšte rješenje

x_h - opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine

x_p - neko partikularno rješenje nehomogene jednačine

karakteristična jednačina $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$

$$x_h = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t}.$$

Primjetimo da se izraz e^{t} nalazi u homogenom rješenju pa imamo

$$x_p = Ate^{t} + Be^{t} + Ce^{4t}$$

$$\dot{x}_p = Ae^{t} + Ate^{t} + Be^{t} + 4Ce^{4t} = Ate^{t} + (A+B)e^{t} + 4Ce^{4t}$$
$$\ddot{x}_p = Ae^{t} + Ate^{t} + (A+B)e^{t} + 16Ce^{4t} = Ate^{t} + (2A+B)e^{t} + 16Ce^{4t}$$

Kako je

$$\ddot{x}_p = Ate^{t} + (2A+B)e^{t} + 16Ce^{4t}$$
$$-4\dot{x}_p = -4Ate^{t} + (-4A-4B)e^{t} - 16Ce^{4t}$$
$$3x_p = 3Ate^{t} + 3Be^{t} + 3Ce^{4t}$$

to je

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_p - 4\dot{x}_p + 3x_p = (-2A)e^{t} + 3Ce^{4t} \\ A \text{ iz } (*) \Rightarrow \quad &\ddot{x}_p - 4\dot{x}_p + 3x_p = -2e^{t} - 3e^{4t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 1$$

Konstanta B je proizvoljna, ali kako izraz C_1e^{t} već imamo u homogenom rješenju to ćemo Be^{t} izostaviti.

$$x(t) = C_1e^{t} + C_2e^{3t} + te^{t} - e^{4t} \quad \dots (**)$$

Prva jednačina iz sistema je $\dot{x} = 2x + y + 2e^{t}$ pa je

$$y = \dot{x} - 2x + 2e^{t}$$

Prema (**) imamo

$$\dot{x} = \underline{c_1 e^t} + \underline{3c_2 e^{3t}} + \underline{e^t} + \underline{te^t} - 4e^{4t}$$

$$-2x = \underline{-2c_1 e^t} \underline{-2c_2 e^{3t}} \underline{-2te^t} + 2e^{4t}$$

pa je

$$y(t) = (-c_1 - t - 1)e^t + c_2 e^{3t} - 2e^{4t}$$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + t)e^t + c_2 e^{3t} - e^{4t} \\ y(t) = (-c_1 - t - 1)e^t + c_2 e^{3t} - 2e^{4t} \end{cases}$$

II način

$$\dot{x} = 2x + y + 2e^t \quad \dots (I)$$

$$\dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \quad \dots (II)$$

Iz prve jednačine ćemo izraziti y i uvrstiti je u drugu jednačinu

$$y = \dot{x} - 2x - 2e^t \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} - 2\dot{x} - 2e^t$$

Zadnje dvije jednakosti uvrstimo u (II)

$$\ddot{x} \underline{-2\dot{x}} - 2e^t = x + 2(\dot{x} - 2x - 2e^t) - 3e^{4t}$$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = -2e^t - 3e^{4t}$$

dobili smo linearnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima (vidi (*) iz I načina)

Ovu jednačinu smo već rješili (vidi I način): $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + te^t - e^{4t}$

Ostatak rješenja je potpuno isti kao u prvom načinu.

\# Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\ddot{x} = 2x + 3y + e^{2t}$$

$$\ddot{y} = -x - 2y$$

tako da partikularno rješenje zadovoljava uslove $x = y = 1$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$ kada je $t = 0$.

Rj.

$$\ddot{x} = 2x + 3y + e^{2t} \quad \dots (I) \quad \Big/ \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\ddot{y} = -x - 2y \quad \dots (II)$$

$$\ddddot{x} = 2\ddot{x} + 3\ddot{y} + 4e^t \quad \dots (III)$$

$$\ddot{y} = -x - 2y$$

Uvrstimo (I) i (II) u (III):

$$\ddddot{x} = 2(2x + 3y + e^{2t}) + 3(-x - 2y) + 4e^t$$

$$\ddddot{x} = x + 6e^{2t}$$

Kako je $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ako uvedemo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ imamo

$$(D^4 - 1)x = 6e^{2t}$$

ovo je linear. jednač. četvrtog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$x = x_h + x_p$

karakt. jedn. $\lambda^4 - 1 = 0$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

$$x_h = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

Primjetimo da se izraz e^{2t} ne pojavljuje u homogenom rješenju.

$$x_p = A e^{2t}$$
$$\dot{x}_p = 2A e^{2t}$$
$$\ddot{x}_p = 4Ae^{2t}$$
$$\dddot{x}_p = 8Ae^{2t}$$
$$\ddddot{x}_p = 16Ae^{2t}$$

$$\ddddot{x}_p - x_p = 6e^{2t}$$
$$15Ae^{2t} = 6e^{2t} \quad /:3$$
$$A = \frac{2}{5}$$

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t + \frac{2}{5} e^{2t}$$

Sad, kako je

$$\dot{x} = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - C_3 \sin t + C_4 \cos t + \frac{4}{5} e^{2t}$$
$$\ddot{x} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t + \frac{8}{5} e^{2t}$$

i prema (1) $\quad 3y = \ddot{x} - 2x - e^{2t}$ imamo

$$y(t) = -\frac{1}{3}(C_1 e^t + C_2 e^{-t}) - (C_3 \cos t + C_4 \sin t) - \frac{1}{15} e^{2t}$$

Primjetimo da smo x mogli odrediti i uz pomoć determinanti. Ako sistem napišemo u operator oznakama

$$(D^2-2)x - 3y = e^{2t}$$
$$x + (D^2+2)y = 0$$

$$\begin{vmatrix} D^2-2 & -3 \\ 1 & D^2+2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^{2t} & 3 \\ 0 & D^2+2 \end{vmatrix} \quad \text{ili} \quad (D^4-1)x = 6e^{2t}$$

...

Kada je $t=0$,

$$x = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{2}{5} = 1$$
$$\dot{x} = C_1 - C_2 + C_4 + \frac{4}{5} = 0$$
$$y = -\frac{1}{3}(C_1 + C_2) - C_3 - \frac{1}{15} = 1$$
$$\dot{y} = -\frac{1}{3}(C_1 - C_2) - C_4 - \frac{2}{15} = 0$$

Imamo četri linearne jednačine sa četri nepoznate C_1, C_2, C_3 i C_4. Njihovo rješenje je

$$C_1 = \frac{3}{4}, \quad C_2 = \frac{7}{4}, \quad C_3 = \frac{-19}{10}, \quad C_4 = \frac{1}{5}$$

i traženo partikularno rješenje je

$$x = \frac{1}{4}(3e^t + 7e^{-t}) - \frac{1}{10}(19\cos t - 2\sin t) + \frac{2}{5}e^{2t}$$
$$y = -\frac{1}{12}(3e^t + 7e^{-t}) + \frac{1}{10}(19\cos t - 2\sin t) - \frac{1}{15}e^{2t}$$

Odrediti opšte rješenje sistema

$$x''(t) + y'(t) - x(t) + y(t) = -1$$
$$x'(t) + y'(t) - x(t) = t^2 .$$

Rj. Prvo napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - x + y = -1$$
$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x = t^2$$

Ako uvedemo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ sistem postaje

$$(D^2-1)[x] + (D+1)[y] = -1 \quad \ldots (I)$$
$$(D-1)[x] + D[y] = t^2 \quad \ldots (II)$$

Riješimo se y-na:

$D \cdot (I)$: $\quad D(D^2-1)[x] + D(D+1)[y] = D[-1]$

$(D+1)(II)$: $\quad - \quad (D+1)(D-1)[x] + D(D+1)[y] = (D+1)[t^2]$

$$\Big(D\underbrace{(D^2-1)}_{(D-1)(D+1)} - (D+1)(D-1)\Big)[x] = 0 - (2t + t^2)$$
$$(D-1)(D+1)(D-1)[x] = -2t - t^2$$
$$(D-1)^2(D+1)[x] = -t^2 - 2t \quad \ldots (III)$$

Jednačina (III) je linearna jednačina trećeg reda po x sa konstantnim koeficijentima - opšte rješenje možemo odrediti metodom neodređenih koeficijenata. $\quad x = x_h + x_p$

$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$ karakter. jednačina

$$x_h = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-t}$$

$x_p = At^2 + Bt + C$

$x_p' = 2At + B$

$x_p'' = 2A$

$x_p''' = 0$

$\Rightarrow$

$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$

$(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda+1) = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$x_p''' - x_p'' - x_p' + x_p = -t^2 - 2t$

$2 - 2A - (2At + B) + (At^2 + Bt + C) = -t^2 - 2t$

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B - 2A &= -2 \\ -2A - B + C &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= -4 \\ C &= -6 \end{aligned}$$

$x_p(t) = -t^2 - 4t - 6$

Opšte rješenje jednačine (III) je

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-t} - t^2 - 4t - 6 \quad \ldots (*)$$

Da bi odredili y(t) prvo ćemo, ako je moguće, iskoristiti sistem i izvesti jednačinu koja uključuje y(t) ali ne i njezin izvod. Poslije toga ćemo zamijeniti dobijeni izraz za x(t) u tu jednačinu i dobiti formulu za y(t)

$$(D^2-1)[x] + (D+1)[y] = -1 \quad \ldots (IV)$$
$$(D-1)[x] + D[y] = t^2 \quad \ldots (V)$$

$(IV) - (V)$: $\quad (D^2 - D)[x] + y = -1 - t^2$

$$y = (D - D^2)[x] - 1 - t^2$$

uvrstimo

$(*) \Rightarrow \quad y = C_1 e^t + C_2(e^t + te^t) - C_3 e^{-t} - 2t - 4 - (C_1 e^t + C_2(te^t + 2e^t) + C_3 e^{-t} - 2) - 1\ t^2$

Prema tome

$$y(t) = -C_2 e^t - 2C_3 e^{-t} - t^2 - 2t - 3 \quad \ldots (**)$$

(*) i (**) su opšte rješenje datog sistema

(#) Riješiti sistem

$$\dot{x}+2\dot{y}=3x-4y+2\sin t$$
$$2\dot{x}+\dot{y}=-2x+y+\cos t$$

Rj: Napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d}{dt}x-3x+2\frac{d}{dt}y+4y=2\sin t$$
$$2\frac{d}{dt}x+2x+\frac{d}{dt}y-y=\cos t$$

uvedimo oznaku $\frac{d}{dt}=D$

rješimo se y-na

$$(D-3)x+2(D+2)y=2\sin t \qquad /\cdot(D-1)$$
$$2(D+1)x+(D-1)y=\cos t \qquad /2(D+2)$$

$$(D-1)(D-3)x+2(D-1)(D+2)y=\underbrace{2(D-1)\sin t}_{=2(\cos t-\sin t)}$$
$$4(D+1)(D+2)x+2(D-1)(D+2)y=\underbrace{2(D+2)\cos t}_{=2(-\sin t+2\cos t)}$$

$-$

$$\left(D^2-4D+3-4(D^2+3D+2)\right)x=2\cos t-2\sin t-(-2\sin t+4\cos t)$$
$$\left(-3D^2-16D-5\right)x=-2\cos t \qquad /\cdot(-1)$$
$$\left(3D^2+16D+5\right)x=2\cos t \qquad \ldots(1)$$

Jednačina (1) je linearna jednačina drugog reda po x-u sa sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata.

$x=x_h+x_p$

kar. jedn. $3\lambda^2+16\lambda+5=0$ $\quad D=196$ $\quad \lambda_{1,2}=\frac{-16\pm 14}{6}$ $\quad \lambda_1=\frac{-30}{6}=-5$, $\quad \lambda_2=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

$$x_h=C_1e^{-5t}+C_2e^{-\frac{t}{3}}$$

$x_p=A\cos t+B\sin t$ $\qquad 3x_p''+16x_p'+5x_p=2\cos t$

$x_p'=-A\sin t+B\cos t$

$x_p''=-A\cos t-B\sin t$

$$3x_p''=-3A\cos t-3B\sin t$$
$$16x_p'=16B\cos t-16A\sin t$$
$$5x_p=5A\cos t+5B\sin t$$

$\Rightarrow$
$$2A+16B=2$$
$$-16A+2B=0$$

$$A+8B=1$$
$$-8A+B=0 \Rightarrow B=8A$$

$$A+64A=1$$
$$65A=1$$
$$A=\frac{1}{65} \Rightarrow B=\frac{8}{65}$$

$$x(t)=C_1e^{-5t}+C_2e^{-\frac{t}{3}}+\frac{8}{65}\sin t+\frac{1}{65}\cos t \qquad \ldots(*)$$

Vratimo se u početni sistem i rješimo se $\dot{y}$

$$\dot{x}+2\dot{y}=3x-4y+2\sin t \qquad (II)$$
$$2\dot{x}+\dot{y}=-2x+y+\cos t \qquad (III) \qquad /\cdot(-2)$$

Rješenje sistema su funkcije x(t) i y(t) iz (*) i (**).

(II)$-2\cdot$(III): $\quad -3\dot{x}=7x-6y+2\sin t-2\cos t$

$$6y=3\dot{x}+7x+2\sin t-2\cos t$$

Iz (*) imamo da je $\dot{x}=-5C_1e^{-5t}-\frac{1}{3}C_2e^{-\frac{t}{3}}+\frac{8}{65}\cos t-\frac{1}{65}\sin t$

$$3\dot{x}=-15C_1e^{-5t}-C_2e^{-\frac{t}{3}}+\frac{24}{65}\cos t-\frac{3}{65}\sin t$$
$$7x=7C_1e^{-5t}+7C_2e^{-\frac{t}{3}}+\frac{56}{65}\sin t+\frac{7}{65}\cos t$$

pa

$$y(t)=\frac{1}{6}\left(-8C_1e^{-5t}+6C_2e^{-\frac{t}{3}}+\frac{183}{65}\sin t-\frac{99}{65}\cos t\right)=-\frac{4}{3}C_1e^{-5t}+C_2e^{-\frac{t}{3}}+\frac{61}{130}\sin t-\frac{33}{130}\cos t \qquad \ldots(**)$$

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot x + \dot y + x - y = e^t$$
$$\ddot x + \dot x + \ddot y - \dot y + x + y = t^2$$

Rj. Napišimo sistem u operator oznakama, gdje je $D = \frac{d}{dt}$

$$(D+1)x + (D-1)y = e^t \qquad /(D^2+D+1) \qquad \ldots(I)$$
$$(D^2+D+1)x + (D^2-D+1)y = t^2 \qquad /(D+1) \qquad \ldots(II)$$

$$(D^2+D+1)(D+1)x + (D^2+D+1)(D-1)y = e^t + e^t + e^t$$
$$-\ (D^2+D+1)(D+1)x + (D^2-D+1)(D+1)y = 2t + t^2$$

$$\left((D^3-1) - (D^3+1)\right)y = 3e^t - 2t - t^2$$
$$-2y = 3e^t - 2t - t^2 \qquad /:(-2)$$
$$y = \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}e^t$$

Slično možemo odrediti i x

$(I)\cdot(D^2-D+1):$ $\quad (D+1)(D^2-D+1)x + (D-1)(D^2-D+1)y = e^t - e^t + e^t$

$(II)\cdot(D-1):$ $\quad -\ (D-1)(D^2+D+1)x + (D-1)(D^2-D+1)y = 2t - t^2$

$$\left((D^3+1) - (D^3-1)\right)x = e^t - 2t + t^2$$
$$2x = t^2 - 2t + e^t$$
$$x = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}e^t$$

Primjetimo da je $\begin{vmatrix} D+1 & D-1 \\ D^2+D+1 & D^2-D+1 \end{vmatrix} = 2$ stepena 0 po D; prema tome proizvoljne konstante se ne pojavljuju u rješenju

Riješiti sistem

$$\ddot x - m^2 y = 0$$
$$\ddot y + m^2 x = 0 .$$

Rj. Napišimo sistem u operator oznakama, gdje ćemo staviti $D = \frac{d}{dt}$.

$$D^2 x - m^2 y = 0 \qquad /\cdot D^2 \qquad \ldots(I)$$
$$D^2 y + m^2 x = 0$$

$$D^4 x - m^2 D^2 y = 0$$
$$D^2 y + m^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad D^2 y = -m^2 x$$

$$D^4 x - m^2(-m^2 x) = 0$$
$$(D^4 + m^4)x = 0$$

ovo je linearna jednačina četvrtog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$\lambda^4 + m^4 = 0$ karak. jedn.

$\lambda^2 = t \Rightarrow t^2 + m^4 = 0$

$b^2 - 4ac = -4m^4$, $t_{1,2} = \frac{0 \pm 2im^2}{2} = \pm i m^2$

$\lambda^2 = \pm i m^2$ $\qquad (1-i)(1-i) = 1 - 2i + i^2 = -2i$

Znamo $(1+i)(1+i) = 1 + 2i + i^2 = 2i$

pa je $\frac{m}{\sqrt{2}}(1+i)\cdot\frac{m}{\sqrt{2}}(1+i) = m^2 i$

Prema tome $\lambda_{1,2} = \pm\frac{m}{\sqrt{2}}(1+i)$ $\quad \lambda_{3,4} = \pm\frac{m}{\sqrt{2}}(1-i)$

pa je $x(t) = e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}\left(C_1\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t + C_2\sin\frac{mt}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t}\left(C_3\cos\frac{mt}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$.

Zamjenjujući $x(t)$ u (I) i rješavajući

$$y(t) = \frac{1}{m^2}D^2 x = e^{\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(C_2\cos\frac{mt}{\sqrt{2}} - C_1\sin\frac{mt}{\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{-mt}{\sqrt{2}}}\left(C_3\sin\frac{mt}{\sqrt{2}} - C_4\cos\frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$$

(#) Riješiti sistem
$$\ddot{x} - 3\dot{y} + 4x = 0$$
$$3\dot{x} + \ddot{y} + 4y = 0.$$

Rj. Napišimo sistem u operator oznakama, gdje je $D = \frac{d}{dt}$.

$$(D^2+4)x - 3Dy = 0 \quad \dots (I) \quad /(D^2+4)$$
$$3Dx + (D^2+4)y = 0 \quad \dots (II) \quad /3D$$

$$(D^2+4)^2 x - 3D(D^2+4)y = 0$$
$$+ \quad 9D^2 x + 3D(D^2+4)y = 0$$

$$\left((D^2+4)^2 + 9D^2\right) x = 0$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina četvrtog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

karakt. jedn. $(\lambda^2+4)^2 + 9\lambda^2 = 0$

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 + 9\lambda^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 4i$$
$$\lambda^4 + 17\lambda^2 + 16 = 0 \qquad \lambda_{3,4} = \pm i$$
$$(\lambda^2+16)(\lambda^2+1) = 0$$

$$x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

Slično, $(I)\cdot(-3D)$: $\quad -3D(D^2+4)x + 9D^2 y = 0$

$(II)\cdot(D^2+4)$: $\quad + \; 3D(D^2+4)x + (D^2+4)^2 y = 0$

$$(D^2+16)(D^2+1)y = 0$$

pa je

$$y(t) = K_1 \cos 4t + K_2 \sin 4t + K_3 \cos t + K_4 \sin t$$

Da bi se riješili suvišnih rješenja, zamjenimo dobijene $x(t)$ i $y(t)$ u I. Imamo

$$-12C_1 \cos 4t - 12C_2 \sin 4t + 3C_3 \cos t + 3C_4 \sin t$$
$$+ 12K_1 \sin 4t - 12K_2 \cos 4t + 3K_3 \sin t - 3K_4 \cos t = 0$$

za sve vrijednosti t; time ... (ZA VJEŽBU)

$$K_1 = C_2, \quad K_2 = -C_1, \quad K_3 = -C_4, \quad K_4 = C_3$$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t + C_3 \cos t + C_4 \sin t \\ y(t) = C_2 \cos 4t - C_1 \sin 4t - C_4 \cos t + C_3 \sin t \end{cases}$$

\# Odrediti opšte rješenje sistema

$$x'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t)$$
$$y'(t) = x(t) + z(t)$$
$$z'(t) = 4x(t) - 4y(t) + 5z(t).$$

Rj: Napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d}{dt}x - x - 2y + z = 0$$
$$-x + \frac{d}{dt}y - z = 0$$
$$-4x + 4y + \frac{d}{dt}z - 5z = 0$$

Ako uvedemo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ sistem postaje

$$(D-1)[x] - 2y + z = 0 \qquad (I)$$
$$-x + Dy - z = 0 \qquad (II)$$
$$-4x + 4y + (D-5)[z] = 0 \qquad (III)$$

Rješimo se z-ta: $\quad -D+5-4$

$(I)+(II)$: $(D-2)[x] + (D-2)[y] = 0$

$(III)+(II)\cdot(D-5)$: $(-D+1)[x] + (D^2-5D+4)[y] = 0$

$$(D-2)[x] + (D-2)[y] = 0 \qquad /\cdot(D-1)$$
$$-(D-1)[x] + (D-1)(D-4)[y] = 0 \qquad /(D-2) \qquad \dots(IV)$$

Sad se želimo rješiti x-a.

$$(D-1)(D-2)[x] + (D-1)(D-2)[y] = 0$$
$$+\; -(D-1)(D-2)[x] + (D-1)(D-2)(D-4)[y] = 0$$

$$(D-1)(D-2)(D-3)[y] = 0$$

Ovo je homogena linearna jednačina trećeg reda sa konstantnim koeficijentima. Opšte rješenje je

$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \qquad \dots(*)$$

Sad ako saberemo dvije jednačine iz sistema (IV) imamo

$$(D-2-(D-1))[x] + (D-2 + \underbrace{(D-1)(D-4)}_{D^2-5D+4})[y] = 0$$

$$-x + (D^2 - 4D + 2)[y] = 0$$
$$x = y'' - 4y' + 2y$$

Ako u ovu jednačinu stavimo $y(t)$

$$y' = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}$$
$$y'' = C_1 e^{t} + 4C_2 e^{2t} + 9C_3 e^{t}$$

imamo

$$x(t) = -C_1 e^{t} - 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{3t} \qquad \dots(**)$$

Na kraju, koristeći jednačinu (II), rješenje za $z(t)$ dobijamo

$$z(t) = y'(t) - x(t)$$

i zamjenjujući $x(t)$ i $y(t)$ dobijamo

$$z(t) = 2C_1 e^{t} + 4C_2 e^{2t} + 4C_3 e^{3t} \qquad \dots(***)$$

Izrazi za $x(t)$ u (**), $y(t)$ u (*) i $z(t)$ u (***) su opšte rješenje datog sistema (gdje su C_1, C_2 i C_3 proizvoljne konstante).

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} + \dot{y} &= 1 - y \\ \dot{x} - \dot{z} &= 1 - 2x - z \\ \dot{y} + \dot{z} &= -y - 2z \end{aligned}$$

Rj: Prvo napišimo sistem u operator oznakama

$$\frac{d}{dt}x + \frac{d}{dt}y + y = 1$$

$$\frac{d}{dt}x + 2x - \frac{d}{dt}z + z = 1$$

$$\frac{d}{dt}y + y + \frac{d}{dt}z + 2z = 0$$

Ako stavimo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ imamo

$$Dx + (D+1)y = 1 \quad \dots(I)$$

$$(D+2)x - (D-1)z = 1 \quad \dots(II)$$

$$(D+1)y + (D+2)z = 0 \quad \dots(III)$$

$(I) - (III):\quad Dx - (D+2)z = 1 \quad /(D+2)$

$(II):\quad (D+2)x - (D-1)z = 1 \quad /\cdot D$

$$(D+2)1 = 0 + 2 = 2$$

$$D(D+2)x - (D+2)^2 z = 2$$

$$- \quad D(D+2)x - D(D-1)z = 0$$

$$\left(-(D^2+4D+4) + D^2 - D\right)z = 2$$

$$(-5D-4)z = 2 \quad /\cdot(-1)$$

$$(5D+4)z = -2$$

ovo je linearna jednačina prvog reda po z-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$$z = z_h + z_p$$

kar. jedn. $5\lambda + 4 = 0$, $\lambda = -\frac{4}{5}$ $\quad z_h = C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$

$z_p = A$

$\dot{z}_p = 0 \qquad 4z_p = -2$

$4A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$$z(t) = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$$

Kako je $\dot{z} = -\frac{4}{5}C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$ zamjenjujući dobijeno z u treću jednačinu sistema $\dot{y} + \dot{z} = -y - 2z$ dobićemo

$$\dot{y} - \frac{4}{5}C_1 e^{-\frac{4}{5}t} = -y + 1 - 2C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$\dot{y} + y = 1 - \frac{6}{5}e^{-\frac{4}{5}t} \qquad (D+1)y = 1 - \frac{6}{5}e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$y = y_h + y_p$$

kar. jedn. $\lambda + 1 = 0$, $\lambda = -1 \Rightarrow y_h = C_2 e^{-t}$ $\qquad y_p = A + Be^{-\frac{4}{5}t}$

$$\dot{y}_p = -\frac{4}{5}Be^{-\frac{4}{5}t}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} + y &= 1 - \frac{6}{5}e^{-\frac{4}{5}t} \\ y_p + \dot{y}_p &= A + \frac{1}{5}Be^{-\frac{4}{5}t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 1 \quad B = -6$$

$$y(t) = C_2 e^{-t} + 1 - 6e^{-\frac{4}{5}t}$$

Kako je $\begin{vmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -(D-1) \\ 0 & D+1 & D+2 \end{vmatrix} = -(5D^2+9D+4)$ stepena 2 po D, opšte rješenje će imati samo dvije proizvoljne konstante.

Za sad imamo $y(t) = C_2 e^{-t} + 1 - 6e^{-\frac{4}{5}t}$

$$z(t) = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$$

Ako oduzmemo prve dvije jednačine sistema, imamo

$$\begin{array}{rl} \dot{x} + \dot{y} & = 1 - y \\ - \quad \dot{x} \quad - \dot{z} & = 1 - 2x - z \\ \hline \dot{y} + \dot{z} & = 2x + z - y \end{array}$$

Aa kako treća jednačina sistema glasi $\dot{y} + \dot{z} = -y - 2z$ imamo

$$-y - 2z = 2x + z - y$$

$$2x = -3z$$

$$x = -\frac{3}{2}z = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}C_1 e^{-\frac{4}{5}t}$$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}C_1 e^{-\frac{4}{5}t} \\ y(t) = C_2 e^{-t} + 1 - 6e^{-\frac{4}{5}t} \\ z(t) = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-\frac{4}{5}t} \end{cases}$$

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} (D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz &= 1 \\ Dx \qquad\qquad + z &= 0 \\ x - Dy - Dz &= 0 \end{aligned}$$

gdje je $D = \frac{d}{dt}$ diferencijalni operator po t. Odrediti partikularno rješenje za koje vrijedi $x = z = 1$, $y = 0$ kada je $t = 0$.

Rj.

$$\begin{array}{rl} (D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz = 1 & \\ Dx \qquad\qquad + z = 0 & /D\cdot(-1) \\ x - Dy - Dz = 0 & /\cdot 2 \\ \hline (D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz = 1 & \\ -D^2 x \qquad - Dz = 0 & \\ 2x - 2Dy - 2Dz = 0 & \\ \hline \end{array}$$

Ako saberemo sve tri zadnje jednačine imamo

$$(D^2 + 2D + 1 - D^2 + 2)x = 1$$

$$(2D+3)x = 1 \quad \text{lin. jedn. sa kon. koefic.}$$

$$x = x_h + x_p$$

karakt. jedn. $2\lambda + 3 = 0$

$$\lambda = -\frac{3}{2} \qquad x_h = C_1 e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$x_p = A \qquad 2\dot{x}_p + 3x_p = 1$$

$$\dot{x}_p = 0 \qquad A = \frac{1}{3}$$

$$x(t) = \frac{1}{3} + C_1 e^{-\frac{3}{2}t}$$

Prema drugoj jednačini sistema $z = -Dx = \frac{3}{2}C_1 e^{-\frac{3}{2}t}$

Iz treće jednačine sistema

$$Dy = x - Dz = \frac{1}{3} + C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{9}{4} C_1 e^{-\frac{3}{2}t} = \frac{1}{3} + \frac{13}{4} C_1 e^{-\frac{3}{2}t}$$

Tada je

$$y(t) = \frac{1}{3} t - \frac{13}{6} C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2$$

Kako je

$$\begin{vmatrix} (D+1)^2 & 2D & 3D \\ D & 0 & 1 \\ 1 & -D & -D \end{vmatrix} = 2D^2 + 3D$$

stepena 2 po D, postoje dvije proizvoljne konstante i opšte rješenje je

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3} + C_1 e^{-\frac{3}{2}t} \\ y(t) = \frac{1}{3} t - \frac{13}{6} C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2 \\ z(t) = \frac{3}{2} C_1 e^{-\frac{3}{2}t} \end{cases}$$

Kada je $t=0$: $x = \frac{1}{3} + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}$

$$y = \left(-\frac{13}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{13}{9}$$

pa traženo partikularno rješenje je

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}t}, \quad y(t) = \frac{1}{3} t - \frac{13}{9} e^{-\frac{3}{2}t}, \quad z(t) = e^{-\frac{3}{2}t}$$

Napomenimo da se partikularno rješenje koje zadovoljava inicijalni skup uslova ne može uvijek odrediti. Na primjer, ne postoji rješenje koje zadovoljava uslov $x=1$, $y=z=0$ kada je $t=0$ zato što $x=1$, $y=0$ je u kontradikciji sa $x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} z$. Slično, $y=0$, $z=1$, $\frac{dx}{dt} = 1$ kada $t=0$ je u kontradikciji sa $\frac{dx}{dt} = -z$.

Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = 3x - y + z$$
$$\dot{y} = -x + 5y - z$$
$$\dot{z} = x - y + 3z$$

Rj. Ovaj sistem ćemo riješiti na drugačiji način nego što smo rješavali prethodne zadatke, čisto da pokažemo još jedan način za rješavanje sistema.

$$\dot{x} = 3x - y + z \quad \ldots (I)$$
$$\dot{y} = -x + 5y - z \quad \ldots (II)$$
$$\dot{z} = x - y + 3z \quad \ldots (III)$$

Iz (I) imamo

$$\ddot{x} = 3\dot{x} - \dot{y} + \dot{z} \quad \ldots (IV)$$

Uvrstimo sad (I), (II), (III) u (IV)

$$\ddot{x} = 3(3x - y + z) - (-x + 5y - z) + (x - y + 3z)$$
$$\ddot{x} = 11x - 9y + 7z \quad \ldots (V)$$

Sad iz (V)

$$\dddot{x} = 11\dot{x} - 9\dot{y} + 7\dot{z} \quad \ldots (VI)$$

Uvrstimo (I), (II) i (III) u (VI)

$$\dddot{x} = 11(3x - y + z) - 9(-x + 5y - z) + 7(x - y + 3z)$$
$$\dddot{x} = 49x - 63y + 41z \quad \ldots (VII)$$

Sljedeći sistem je ekvivalentan datom sistemu

$$\dot{x} = 3x - y + z \qquad \ldots (VIII)$$

$$\ddot{x} = 11x - 9y + 7z \qquad \ldots (IX)$$

$$\dddot{x} = 49x - 63y + 41z \qquad \ldots (X)$$

Izrazimo y i z preko $x, \dot{x}$ i $\ddot{x}$

$$y - z = 3x - \dot{x} \quad / \cdot (-7)$$
$$9y - 7z = 11x - \ddot{x}$$

$$-7y + 7z = -21x + 7\dot{x}$$
$$+ \quad 9y - 7z = 11x - \ddot{x}$$

$$2y = -10x - \ddot{x} + 7\dot{x}$$

$$y = -\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{7}{2}\dot{x} - 5x$$

$$y - z = 3x - \dot{x} \quad / \cdot (-9)$$
$$9y - 7z = 11x - \ddot{x}$$

$$-9y + 9z = -27x + 9\dot{x}$$
$$+ \quad 9y - 7z = 11x - \ddot{x}$$

$$2z = -16x + 9\dot{x} - \ddot{x}$$

$$z = -\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{9}{2}\dot{x} - 8x$$

Sad uvrstimo dobijene izraze za y i z u (X)

$$\dddot{x} = 49x - 63\left(-\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{7}{2}\dot{x} - 5x\right) + 41\left(-\frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{9}{2}\dot{x} - 8x\right)$$

$$= 36x + 11\ddot{x} - 36\dot{x}$$

Dobili smo $\quad \dddot{x} - 11\ddot{x} + 36\dot{x} - 36x = 0$

ovo je linearna jednačina trećeg reda po x sa konstantnim koeficijentima i gornje vjerovatno možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

karak. jedn. $\quad \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$

$\lambda = 1: \quad 1 - 11 + 36 - 36 \neq 0, \qquad \lambda = 2: \quad 8 - 44 + 72 - 36 = 0$

Zadaci za vježbu

Riješiti sljedeće sisteme diferencijalnih jednačina

a)
$$\dot{x} - \dot{y} + y = -e^t$$
$$x + \dot{y} - y = e^{2t}$$

b)
$$\dot{x} + \dot{y} + 2x + y = t$$
$$\dot{y} + 5x + 3y = t^2$$

c)
$$\dot{x} + 2\dot{y} + x + 7y = e^t + 2$$
$$\dot{y} - 2x + 3y = e^t - 1$$

d)
$$\dot{x} + \dot{y} - x + 3y = e^{-t} - 1$$
$$\dot{x} + \dot{y} + 2x + y = e^{2t} + t$$

e)
$$\ddot{x} - 6\dot{y} + 16x = 0$$
$$6\dot{x} + \ddot{y} + 16y = 0$$

f)
$$x''(z) + 4x(z) + y(z) = \sin^2 z$$
$$y''(z) + y(z) - 2x(z) = \cos^2 z$$

g)
$$\ddot{x} + \dot{x} + x + \ddot{y} + y = e^t$$
$$\ddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} = e^{-t}$$

h)
$$\dot{x} - [illegible] + \dot{y} + 2y = 1 + e^t$$
$$\dot{y} + 2y + \dot{z} + z = 2 + e^t$$
$$\dot{x} - x + \dot{z} + z = 3 + e^t$$

RJEŠENJA:

a) $x = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \frac{3}{5}e^{2t}$

$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t$

b) $x = \frac{C_1 - 3C_2}{5}\sin t - \frac{3C_1 + C_2}{5}\cos t - t^2 + t + 3$

$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t^2 - 3t - 4$

c) $x = \frac{1}{2}C_1 e^{-4t}\left(\cos(t + C_2) - \sin(t + C_2)\right) - \frac{5e^t}{26} + \frac{13}{17}$

$y = C_1 e^{-4t}\sin(t + C_2) + \frac{2e^t}{13} + \frac{3}{17}$

d) $x(t) = 2C_1 e^{-\frac{7t}{5}} + \frac{5}{17}e^{2t} + \frac{3}{7}t - \frac{1}{49}$

$y(t) = 3C_1 e^{-\frac{7t}{5}} - \frac{1}{17}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{7}t - \frac{26}{49}$

e) $x(t) = C_1\cos 2t - C_2 \sin 2t + C_3 \cos 8t + C_4 \sin 8t$

$y(t) = C_2 \cos 2t + C_1 \sin 2t + C_4 \cos 8t - C_3 \sin 8t$

f) $x(z) = C_1 \cos(\sqrt{2}z + C_2) + C_3 \cos(\sqrt{3}z + C_4) + \frac{1}{2}\cos 2z$

$y(z) = -2C_1 \cos(\sqrt{2}z + C_2) - C_3 \cos(\sqrt{3}z + C_4) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z$

g) $x(t) = -e^t - 2e^{-t} - C_1$

$y(t) = 2e^t + e^{-t} + C_1$

h) $x(t) = -1 + te^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^t$

$y(t) = \frac{1}{6}e^t + C_1 e^{-2t}$

$z(t) = 2 + \frac{1}{4}e^t + C_3 e^{-t}$

Ojlerova metoda rješavanja homogenog sistema dif. jedn. sa konstantnim koeficijentima

U ovoj lekciji rješavamo homogeni sistem diferencijalnih jednačina oblika

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

Matricu A nazivamo matrica sistema.

Ono što je u rješavanju zadataka bitno je da razlikujemo oblik rješenja karakteristične jednačine $\det(A-\lambda I)=0$

1. svi korijeni su različiti
2. korjen λ_j je kompleksan broj
3. korjen λ_j je reda m $(1<m\leq n)$

U zadacima koji slijede objasnićemo kako se rješava svaki od ovih slučajeva.

\# Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$Y'_x = Z$$
$$Z'_x = Y$$

Rj. Trebamo odrediti f-je $Z=Z(x)$ i $Y=Y(x)$. Rješenje tražimo u obliku $Y=Ae^{\lambda x}$, $Z=Be^{\lambda x}$.

Uvrštavajući izraze za Y, Z, Y', Z' u sistem dobijemo ($Y'_x=\lambda Ae^{\lambda x}$, $Z'_x=\lambda Be^{\lambda x}$):

$$\lambda Ae^{\lambda x} = Be^{\lambda x} \quad /:e^{\lambda x}$$
$$\lambda Be^{\lambda x} = Ae^{\lambda x} \quad /:e^{\lambda x}$$

$$\lambda A - B = 0$$
$$-A + \lambda B = 0$$

Determinanta ovog sistema je $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$

$\lambda^2-1=0$ za $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$

a) za $\lambda_1=1$ imamo

$$A-B=0$$
$$-A+B=0$$
$$A=B$$

Dakle, rješenje sistema je $Y=Ae^{x}$, $Z=Ae^{x}$, pri čemu je A proizvoljna konstanta. Ako stavimo $A=1$, tako dobijamo (biramo) rješenje

$$Y_1=e^x, \quad Z_1=e^x.$$

b) Za korijen $\lambda_2=-1$ imamo

$$\begin{array}{l} -A-B=0 \\ -A-B=0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow B=-A$$

Ako izaberemo $A=1$, onda dobijamo rješenje

$$Y_2=e^{-x}, \quad Z_2=-e^{-x}$$

koje odgovara korijenu $\lambda_2=-1$.

Trebamo provjeriti još da li su rješenja (Y_1,Z_1) i (Y_2,Z_2) linearno nezavisna.

Da li postoje konstante α, β, bar jedna različita od nule, takve da

$$\alpha(Y_1,Z_1)+\beta(Y_2,Z_2)=0$$

$$\begin{array}{l} \alpha Y_1+\beta Y_2=0 \\ \alpha Z_1+\beta Z_2=0 \\ \hline \alpha e^x+\beta e^{-x} \\ \alpha e^x-\beta e^{-x} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{2x}-1 \neq 0$$

Rješenja (Y_1,Z_1) i (Y_2,Z_2) su linearno nezavisna, pa je

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2=C_1e^x+C_2e^{-x}$$
$$Z=C_1Z_1+C_2Z_2=C_1e^x-C_2e^{-x}$$

opšte rješenje sistema.

\# Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x}=4x-y$$
$$\dot{y}=3x+y-z$$
$$\dot{z}=x+z$$

Rj: Dat je homogen sistem linearnih jednačina i neka je t nezavisna promjenjiva. Matrica sistema je

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenja homogenog sistema su oblika $x=Ae^{\lambda t}$, $y=Be^{\lambda t}$, $z=Ce^{\lambda t}$. Ako ovo uvrstimo u dati sistem poslije dijeljenja sa $e^{\lambda t}$ i prebacivanja svih nepoznatih na jednu stranu, dobijamo

$$\begin{array}{l} (4-\lambda)A-B=0 \\ 3A+(1-\lambda)B-C=0 \\ A+(1-\lambda)C=0 \\ \hline \end{array}$$

Odredimo A, B i C.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{II_v+III_v}{=}} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{II_v+I_v}{=}} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 8-\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\underset{=}{\overset{I_k+II_k\cdot 2}{=}} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 8-3\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{I_k+III_k}{=}} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 8-4\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 2-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{III_k+I_k}{=}(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0\\4&4-\lambda&-\lambda\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda&-\lambda\\1&1-\lambda\end{vmatrix} \overset{I_k+II_k}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix}4-2\lambda&-\lambda\\2-\lambda&1-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix}2(2-\lambda)&-\lambda\\2-\lambda&1-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\underbrace{\begin{vmatrix}2&-\lambda\\1&1-\lambda\end{vmatrix}}_{2-2\lambda+\lambda} = (2-\lambda)^3$$

Kako smo dobili višestruki korijen, rješenje tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix}P_k(t)\\Q_k(t)\\R_k(t)\end{bmatrix}e^{\lambda_1 t}$$

gdje su P_k, Q_k, i R_k polinomi reda k, a $k=r+s-n$, gdje je:
- r rang matrice $A-\lambda I$ (=?)
- s višestrukost korijena (=3)
- n red sistema (=3)

$$\frac{1\cdot3}{2\cdot3}\ \frac{1\cdot2}{3\cdot2}=\frac{3-2}{6}$$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix}2&-1&0\\3&-1&-1\\1&0&-1\end{bmatrix} \underset{II_v:3}{\overset{I_v:2}{\sim}} \begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\1&-1/3&-1/3\\1&0&-1\end{bmatrix} \underset{III_v-I_v}{\overset{II_v-I_v}{\sim}} \begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&1/6&-1/3\\0&1/2&-1\end{bmatrix} \overset{II_v\cdot 3}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&1/2&-1\\0&1/2&-1\end{bmatrix} \overset{III_v-II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&1/2&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A-\lambda I)=2$$

$$k=2+3-3=2$$

P_k, Q_k i R_k su polinomi drugog reda oblika

$$P_2(t)=A_2t^2+A_1t+A_0$$
$$Q_2(t)=B_2t^2+B_1t+B_0 \qquad R_2(t)=C_2t^2+C_1t+C_0$$

gdje ćemo koeficijente ovih polinoma odrediti iz uslova da f-je

$$x=P_2(t)e^{2t},\quad y=Q_2(t)e^{2t},\quad z=R_2(t)e^{2t} \qquad \dots(1)$$

budu rješenja datog sistema.

Ako (1) zamjenimo u jednačine sistema, poslije djeljenja sa e^{2t} dobićemo

(kako je
$$\dot{x}=(2A_2t+A_1)e^{2t}+(A_2t^2+A_1t+A_0)e^{2t}\cdot 2$$
$$\dot{y}=(2B_2t+B_1)e^{2t}+(B_2t^2+B_1t+B_0)e^{2t}\cdot 2$$
$$\dot{z}=(2C_2t+C_1)e^{2t}+(C_2t^2+C_1t+C_0)e^{2t}\cdot 2\ )$$

$$2A_2t^2+(2A_2+2A_1)t+A_1+2A_0=(4A_2-B_2)t^2+(4A_1-B_1)t+4A_0-B_0$$
$$2B_2t^2+(2B_2+B_1)t+B_1+2B_0=(3A_2+B_2-C_2)t^2+(3A_1+B_1-C_1)t+3A_0+B_0-C_0$$
$$2C_2t^2+(2C_2+2C_1)t+C_1+2C_0=(A_2+C_2)t^2+(A_1+C_1)t+(A_0+C_0)$$

iz čega slijedi

$$2A_2-B_2=0 \qquad 3A_2-B_2-C_2=0$$
$$-2A_2+2A_1-B_1=0 \qquad 3A_1-2B_2-C_1=0$$
$$-A_1+2A_0-B_0=0 \qquad -B_1+3A_0-B_0-C_0=0$$

$$A_2-C_2=0$$
$$A_1-2C_2-C_1=0$$
$$-C_1+A_0-C_0=0$$

devet homogenih jednačina sa devet nepoznatih

Ako stavimo da je $A_0=D_1$, $A_1=D_2$ i $A_2=D_3$ gdje su

D_1, D_2 i D_3 proizvoljne konstante dobićemo da je

$$B_0 = 2D_1 - D_2 \qquad C_2 = 3D_3 - 2D_3 = D_3$$

$$B_1 = 2D_2 - 2D_3 \qquad C_1 = A_1 - 2C_2 = D_2 - 2D_3$$

$$B_2 = 2D_3 \qquad C_0 = A_0 - C_1 = D_1 - D_2 + 2D_3$$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & + & D_2 t & + & D_3 t^2 \\ 2D_1 - D_2 & + & (2D_2 - 2D_3)\,t & + & 2D_3 t^2 \\ D_1 - D_2 + 2D_3 & + & (D_2 - 2D_3)\,t & + & D_3 t^2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

(#) Riješiti sistem jednačina

$$\frac{dx}{dt} - y - z = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - x - z = 0$$

$$\frac{dz}{dt} - x - y = 0$$

Rješenje:

Rješenje sistema tražimo u obliku

$$x = A_1 e^{\lambda t}, \quad y = A_2 e^{\lambda t}, \quad z = A_3 e^{\lambda t} \qquad \ldots (*)$$

pri čemu nepoznate konstante A_1, A_2, A_3 i λ treba odrediti.

Napišimo sistem u drugačijem obliku

$$\dot{x} - y - z = 0$$

$$-x + \dot{y} - z = 0$$

$$-x - y + \dot{z} = 0$$

Uvrštavajući $(*)$ u sistem dobijamo

$$\lambda A_1 e^{\lambda t} - A_2 e^{\lambda t} - A_3 e^{\lambda t} = 0 \qquad /:e^{\lambda t}$$

$$-A_1 e^{\lambda t} + \lambda A_2 e^{\lambda t} - A_3 e^{\lambda t} = 0 \qquad /:e^{\lambda t}$$

$$-A_1 e^{\lambda t} - A_2 e^{\lambda t} + \lambda A_3 e^{\lambda t} = 0 \qquad /:e^{\lambda t}$$

Karakteristična jednačina sistema je $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$.

i ima korijene $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1$ $(m(-1) = 2)$. $m(-1) \to$ višestrukost korijena (-1)

a) za $\lambda_1 = 2$ imamo

$$2A_1 - A_2 - A_3 = 0$$
$$-A_1 + 2A_2 - A_3 = 0$$
$$-A_1 - A_2 + 2A_3 = 0$$

(prisjetimo se Kroneker-Kapelijeve metode za rješavanje sistem lin. jedn.)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{I_v + II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{III_v + I_v}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{II_v : 3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 + A_2 - 2A_3 = 0 \qquad A_2 = A_3 \Rightarrow A_1 = A_3$$
$$A_2 - A_3 = 0$$

gdje je A_3 proizvoljna konstanta.

Ako za A_3 uzmemo 1 imamo

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1 = e^{2t}, \quad z_1 = e^{2t}.$$

b) Za $\lambda = -1$, kako je višestrukost $m(-1) = 2$, rješenja koja odgovaraju ovom korijenu tražimo u obliku

$$x = (At + B)e^{-t}, \quad y = (Ct + D)e^{-t}, \quad z = (Et + F)e^{-t}$$

Uvrštavajući izraze za x, y, z, x', y', z' u sistem, dobijamo šest uslova iz kojih treba da odredimo koeficijente A, B, C, D, E i F.

$$Ae^{-t} \underline{-(At+B)e^{-t}} \underline{-(Ct+D)e^{-t}} \underline{-(Et+F)e^{-t}} = 0$$
$$\underline{\underline{-(At+B)e^{-t}}} + Ce^{-t} \underline{\underline{-(Ct+D)e^{-t}}} \underline{\underline{-(Et+F)e^{-t}}} = 0$$
$$\underline{\underline{\underline{-(At+B)e^{-t}}}} - \underline{\underline{\underline{(Ct+D)}}}e^{-t} + Ee^{-t} \underline{\underline{\underline{-(Et+F)}}}e^{-t} = 0$$

$$-A - C - E = 0$$
$$A - B - D - F = 0$$
$$-A - C - E = 0$$
$$-B + C - D - F = 0$$
$$-A - C - E = 0$$
$$-B - D + E - F = 0$$

U stvari, od šest dobijenih uslova, samo su četiri međusobno različita (nezavisna) i to

$$A + C + E = 0$$
$$A - B - D - F = 0$$
$$-B + C - D - F = 0$$
$$-B - D + E - F = 0$$

Rješimo ovaj sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v - I_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v \cdot (-1)}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{IV_v + II_v}{\overset{III_v + II_v}{\sim}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{III_v : 2}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{IV_v - III_v}{\sim}$$

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ovim smo dobili da je rang proširene matrice 4, a kako imamo 6 nepoznatih, dvije promjenjive uzimamo proizvoljno. Također smo dobili:

$$\begin{aligned} A + C + E &= 0 \\ B + C + D + E + F &= 0 \\ C + \tfrac{1}{2} E &= 0 \\ \tfrac{3}{2} E &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow A = 0, \quad \Rightarrow C = 0,\ E = 0$$

$$B + D + F = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -D - F$$

gdje promjenjive D i F možemo uzeti proizvoljno. Time je

$$x = (-D-F)e^{-t}, \quad y = De^{-t}, \quad z = Fe^{-t}$$

Ako stavimo da je $D=-1$, $F=0$ dobijamo

$$x_2 = e^{-t}, \quad y_2 = -e^{-t}, \quad z_2 = 0$$

Ako stavimo da je $D=0$, $F=-1$ dobijamo

$$x_3 = e^{-t}, \quad y = 0, \quad z_3 = -e^{-t}$$

Rješenja, (vektori), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) su linearno nezavisna, pa je opšte rješenje sistema trojka (vektor) (x, y, z) pri čemu je

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-t}$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_2 y_3 = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 = C_1 e^{2t} - C_3 e^{-t}$$

Sada ćemo riješiti sistem čija karakteristična jednačina ima imaginarne korijene.

Riješiti sistem

$$\frac{dy}{dx} = -7y + z$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y - 5z$$

Rj. Dati sistem je homogeni sistem i rješenje tražimo u obliku $y = Ae^{\lambda x}$, $z = Be^{\lambda x}$. ... (1)

Sistem možemo napisati u drugačijem obliku

$$y'_x + 7y - z = 0$$

$$2y + z'_x + 5z = 0$$

Kako je $\overset{(iz\ (1))}{y'_x} = \lambda A e^{\lambda x}$, $z'_x = \lambda B e^{\lambda x}$ uvrštavajući (1) u sistem imamo

$$\begin{aligned} \lambda A e^{\lambda x} + 7A e^{\lambda x} - Be^{\lambda x} &= 0 \quad /:e^{\lambda x} \\ 2Ae^{\lambda x} + \lambda B e^{\lambda x} + 5Be^{\lambda x} &= 0 \quad /:e^{\lambda x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\lambda+7)A - B &= 0 \\ 2A + (\lambda+5)B &= 0 \end{aligned}$$

čime dolazimo do karakteristične jednačine

$$\begin{vmatrix} \lambda+7 & -1 \\ 2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 0 \quad tj. \quad \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

$$\lambda_1 = -6 + i$$

$$\lambda_2 = -6 - i$$

a) Za $\lambda_1=-6+i$ imamo (koeficijente A i B određujemo iz sistema)

$$\begin{aligned}(1+i)A - B &= 0\\ 2A+(-1+i)B &= 0\end{aligned}$$

$$B=(1+i)A$$

Stavljajući $A=1$ dobijamo rješenje

$$Y_1=e^{(-6+i)x}, \qquad Z_1=(1+i)e^{(-6+i)x}$$

$$\left(Y_1=e^{-6x}(\cos x+i\sin x),\ Z_1=(1+i)e^{-6x}(\cos x+i\sin x)\right)$$

b) Za $\lambda_2=-6-i$, na isti način, imamo

$$\begin{aligned}(1-i)A - B &= 0\\ 2A+(-1-i)B &= 0\end{aligned}$$

$$B=(1-i)A$$

$$Y_2=e^{(-6-i)x}, \qquad Z_2=(1-i)e^{(-6-i)x}$$

$$\Rightarrow\ Y_2=e^{-6x}(\cos x-i\sin x),\quad Z_2=(1-i)e^{-6x}(\cos x-i\sin x)$$

Paru ovih imaginarnih rješenja (Y_1,Z_1), (Y_2,Z_2) možemo pridružiti par realnih rješenja. Stavimo

$$\tilde{Y}_1=\frac{Y_1+Y_2}{2}=e^{-6x}\cos x, \qquad \tilde{Z}_1=\frac{Z_1+Z_2}{2}=e^{-6x}(\cos x-\sin x)$$

$$\tilde{Y}_2=\frac{Y_1-Y_2}{2i}=e^{-6x}\sin x, \qquad \tilde{Z}_2=\frac{Z_1-Z_2}{2i}=e^{-6x}(\cos x+\sin x)$$

Tako dobijamo opće rješenje (Y,Z):

$$Y=C_1\tilde{Y}_1+C_2\tilde{Y}_2=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x);$$

$$Z=C_1\tilde{Z}_1+C_2\tilde{Z}_2=e^{-6x}\left[(C_1+C_2)\cos x-(C_1-C_2)\sin x\right].$$

Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}\dot{x}&=2x+y-2z\\ \dot{y}&=-x\\ \dot{z}&=x+y-z\end{aligned}$$

gdje je $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$, $\dot{z}=\frac{dz}{dt}$.

Rj. Dat je homogeni sistem linearnih jednačina (t je nezavisna promjenjiva). Matrica sistema je

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Rješenja ovog sistema su oblika $x=Ae^{\lambda t}$, $y=Be^{\lambda t}$, $z=Ce^{\lambda t}$. Ako ovo uvrstimo u dati sistem poslije dijeljenja sa $e^{\lambda t}$ i malog sređivanja dobijamo

$$\begin{aligned}(2-\lambda)A+B-2C&=0\\ -A-\lambda B\qquad&=0\\ A+B+(-1-\lambda)C&=0\end{aligned}$$

određimo A, B i C.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & -2\\ -1 & -\lambda & 0\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}\ \begin{matrix}I_k+III_k\\ \overline{III_k+II_k}\end{matrix}\ \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ -1 & -\lambda & -\lambda\\ -\lambda & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(-1)(-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & \lambda\\ \lambda & 1 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal{I_k-III_k}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1\\ 1-\lambda & -\lambda & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal{II_v+I_v}(1-\lambda)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1+\lambda\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(1+\lambda^2)$$

Karakteristična jednačina $(1-\lambda)(1+\lambda^2)=0$ ima korijene $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i,\ \lambda_3=1$.

a) Za $\lambda_1=i$ sistem postaje

$$\begin{aligned}(2-i)A+B-2C&=0\\ -A-iB&=0 \Rightarrow A=-iB\\ A+B+(-1-i)C&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}(2-i)(-iB)+B-2C&=0\\ -iB+B+(-1-i)C&=0\end{aligned}$$

$i^2=-1$
$-i^2=1$

$$\begin{aligned}(-1-2i+1)B-2C&=0 \Rightarrow 2C=-2iB \Rightarrow C=-iB\\ (-i+1)B+(-1-i)C&=0\end{aligned}$$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja i jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

Za $B=i$ imamo $A=1,\ B=i,\ C=1$

$$x_1(t)=e^{it},\quad y_1(t)=ie^{it},\quad z_1(t)=e^{it}$$

b) Za $\lambda_2=-i$ sistem postaje

$$\begin{aligned}(2+i)A+B-2C&=0\\ -A+iB&=0 \Rightarrow A=iB\\ A+B+(-1+i)C&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2+i)(iB)+B-2C&=0\\ (2i+i^2+1)B-2C&=0\\ 2C&=2iB\\ C&=iB\end{aligned}$$

Za $B=-i$ imamo $A=1,\ C=1$

$$x_2(t)=e^{-it},\quad y_2(t)=-ie^{-it},\quad z_2(t)=e^{-it}$$

c) $\lambda_3=1$ sistem postaje

$$\begin{aligned}A+B-2C&=0\\ -A-B&=0 \Rightarrow B=-A\\ A+B-2C&=0\end{aligned}$$

$$A+(-A)-2C=0 \Rightarrow C=0$$

Za $\lambda=1$: $x_3(t)=e^t,\quad y_3(t)=-e^t,\quad z_3(t)=0$

Kako rješenje sistema želimo napisati u realnom obliku imaginarnim rješenjima $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ možemo pridružiti realna rješenja na sljedeći način:

$$\tilde{x}_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})=\frac{1}{2}(\cos t+i\sin t+(\cos t-i\sin t))=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos t=\cos t$$

$$\tilde{x}_2=\frac{1}{2i}(x_1-x_2)=\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})=\frac{1}{2i}(\cos t+i\sin t-(\cos t-i\sin t))=\sin t$$

$$\tilde{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(ie^{it}-ie^{-it})=\frac{1}{2}(-\sin t+i\cos t-(\sin t+i\cos t))=-\sin t$$

$$\tilde{y}_2=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=\frac{1}{2i}(ie^{it}+ie^{-it})=\frac{1}{2i}(-\sin t+i\cos t+\sin t+i\cos t)=\cos t$$

Slično $\tilde{z}_1=\frac{1}{2}(z_1+z_2)=\cos t,\quad \tilde{z}_2=\frac{1}{2}(z_1-z_2)=\sin t$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{aligned}x(t)&=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3e^t\\ y(t)&=-C_1\sin t+C_2\cos t-C_3e^t\\ z(t)&=C_1\cos t+C_2\sin t\end{aligned}$$

Primjetimo da je
$\tilde{x}_1=Re(x_1)$
$\tilde{x}_2=Im(x_1)$
$\tilde{y}_1=Re(y_1)$
$\tilde{y}_2=Im(y_1)$
$\tilde{z}_1=Re(z_1)$
$\tilde{z}_2=Im(z_1)$

Zadaci za vežbu

(1.) Riješiti dati sistem linearnih jednačina

a)
$$\dot{x} = 2x - y + z$$
$$\dot{y} = x + 2y - z$$
$$\dot{z} = x - y + 2z$$

b)
$$\dot{x} = x - y - z$$
$$\dot{y} = x + y$$
$$\dot{z} = 3x + z$$

c)
$$\dot{x} = 2x - y - z$$
$$\dot{y} = 2x - y - 2z$$
$$\dot{z} = -x + y + 2z$$

d)
$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = y - 4x$$

e)
$$\dot{x} = x + z - y$$
$$\dot{y} = x + y - z$$
$$\dot{z} = 2x - y$$

f)
$$\dot{x} + 5x - 3y = 0$$
$$\dot{y} + 15x - 7y = 0$$

Rješenje - upute:

a) Karakteristični korijeni su $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
$$x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$$
$$y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$$
$$z = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$$

b) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1+2i,\ \lambda_3 = 1-2i$
$$x = C_2 e^t \cos 2t + C_3 2e^t \sin 2t$$
$$y = C_1 e^t + C_2 e^t \sin 2t - C_3 e^t \cos 2t$$
$$z = -C_1 e^t + C_2 3e^t \sin 2t - C_3 3e^t \cos t$$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
$$x(t) = (-C_3 t + C_1)\, e^t$$
$$y(t) = (-2C_3 t + C_2)\, e^t$$
$$z(t) = (C_3 t + C_1 - C_2 + C_3)\, e^t$$

d)
$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$
$$y = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}$$

e)
$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{t}$$
$$y = C_2 e^{t} - 3C_3 e^{-t}$$
$$z = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} - 5C_3 e^{-t}$$

f)
$$x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$
$$y = e^t \left((2C_1 + C_2) \cos 3t + (-C_1 + 2C_2) \sin 3t\right)$$

Metod varijacije konstanti

(#) Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 3x - 3y + 4$$
$$\dot{y} = 2x - 2y - 1$$

Rj.

Rješenje sistema će biti f-je $x = x(t)$ i $y = y(t)$.
Prvo odredimo opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema

$$3x - \dot{x} - 3y = 0$$
$$2x - 2y - \dot{y} = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\dot{x} = \lambda A e^{\lambda x}$$
$$\dot{y} = B\lambda e^{\lambda x}$$
$$\Uparrow$$

Rješenja homogenog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda x}$, $y = Be^{\lambda x}$
pa ako to uvrstimo u (1) imamo

$$3Ae^{\lambda x} - A\lambda e^{\lambda x} - 3Be^{\lambda x} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$$
$$2Ae^{\lambda x} - 2Be^{\lambda x} - B\lambda e^{\lambda x} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$$

$$(3-\lambda)A - 3B = 0$$
$$2A + (-2-\lambda)B = 0$$

Odredimo koeficijente A i B. Determinanta zadnjeg sistema je

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 6 = -6 \underline{-3\lambda} \underline{+2\lambda} + \lambda^2 + 6 =$$
$$= \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

Karakteristična jednačina $\lambda(\lambda-1) = 0$ ima korijene $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$.

a) Za $\lambda_1 = 0$ imamo

$$3A - 3B = 0$$
$$2A - 2B = 0$$
$$A = B$$

sistem ima ∞ mnogo rješ. jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

za $B = 1 \Rightarrow A = 1$

$$x_1(t) = 1e^{0t} = 1$$
$$y_1(t) = 1 \cdot e^{0t} = 1$$

b) Za $\lambda_2 = 1$ imamo

$$2A - 3B = 0$$
$$2A - 3B = 0$$
$$B = \frac{2}{3}A$$

sistem ima ∞ mnogo rješenja jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

za $A = 3 \Rightarrow B = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = 3e^t$,
$$y_2(t) = 2e^t$$

Opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema je

$$x(t) = C_1 + 3C_2 e^t$$
$$y(t) = C_1 + 2C_2 e^t$$

Sada ćemo metodom varijacije konstanti tražiti opšte rješenje datog nehomogenog sistema u obliku

$$x(t) = C_1(t) + 3C_2(t)e^t$$
$$y(t) = C_1(t) + 2C_2(t)e^t$$

pri čemu izvode C_1', C_2' f-ja $C_1(t)$ i $C_2(t)$ odredjujemo iz sistema

$$C_1' + 3C_2' e^t = 4$$
$$C_1' + 2C_2' e^t = -1$$

Nepoznate su C_1' i C_2' i ovaj sistem možemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3e^t & 4 \\ 1 & 2e^t & -1 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3e^t & 4 \\ 0 & -e^t & -5 \end{array}\right] \overset{I_v + II_v\cdot 3}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & -e^t & -5 \end{array}\right] \overset{II_v\cdot(-e^{-t})}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 5e^{-t} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_1' = -11, \quad C_2' = 5e^{-t}$$

Integracijom zadnjih jednačina dobijamo

$$C_1(t) = -11t + D_1$$

$$C_2(t) = -5e^{-t} + D_2$$

Kako je

$$C_1(t) + 3C_2(t)e^t = -11t + \underline{D_1} - 15 + \underline{\underline{3D_2}}\, e^t = D_1 + 3D_2e^t - 11t - 15$$

i $\quad C_1(t) + 2C_2(t)e^t = -11t + D_1 + (-10) + 2D_2e^t = D_1 + 2D_2e^t - 11t - 10$

to je opšte rješenje datog sistema

$$x(t) = D_1 + 3D_2e^t - 11t - 15$$

$$y(t) = D_1 + 2D_2e^t - 11t - 10$$

(#) Znajući da je $y = C_1x^2 + C_2\frac{1}{x^2}$, $z = \frac{1}{3}C_1x^2 - C_2\frac{1}{x^2}$ opšte rješenje sistema:

$$y_x' = \frac{1}{x}y + \frac{3}{x}z$$

$$z_x' = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}z$$

naći opšte rješenje sistema

$$y_x' = \frac{1}{x}y + \frac{3}{x}z + 1$$

$$z_x' = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}z$$

Rj: Imamo da su $\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{3}x^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$

linearno nezavisna rješenja datog homogenog sistema. Opšte rješenje nehomogenog sistema tražimo u obliku

$$y(x) = C_1(x)x^2 + C_2(x)\frac{1}{x^2}$$

$$z(x) = \frac{1}{3}C_1(x)x^2 - C_2(x)\frac{1}{x^2}$$

pri čemu izvode $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ f-ja $C_1(x)$, $C_2(x)$ određujemo iz sistema

$$C_1'x^2 + C_2'\frac{1}{x^2} = 1$$

$$\frac{1}{3}C_1'x^2 - C_2'\frac{1}{x^2} = 0$$

Nepoznate su C_1' i C_2' i sistem možemo rješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} x^2 & \frac{1}{x^2} & 1 \\ \frac{x^2}{3} & -\frac{1}{x^2} & 0 \end{array}\right] \overset{II_v \cdot 3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} x^2 & \frac{1}{x^2} & 1 \\ x^2 & -\frac{3}{x^2} & 0 \end{array}\right] \overset{II_v - I_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} x^2 & \frac{1}{x^2} & 1 \\ 0 & -\frac{4}{x^2} & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{II_v \cdot \frac{1}{4}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} x^2 & \frac{1}{x^2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \overset{I_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} x^2 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \underset{II_v \cdot (-x^2)}{\overset{I_v \cdot x^{-2}}{\sim}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4}x^{-2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4}x^2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} C_1'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2} \\ C_2'(x) = \frac{x^2}{4} \end{array}$$

a zatim

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + D_1$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = \frac{x^3}{12} + D_2$$

pri čemu su D_1 i D_2 proizvoljne konstante

Opšte rješenje nehomogenog sistema je

$$y(x) = D_1 x^2 + D_2 \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3}x$$

$$z(x) = D_1 \frac{x^2}{3} - D_2 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}x$$

$$C_1(x) \cdot x^2 = -\frac{3}{4}x + x^2 D_1$$

$$C_2(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x}{12} + \frac{1}{x^2} D_2$$

$$+$$

$$D_1 x^2 + D_2 \frac{1}{x^2} - \frac{8}{12}x$$

Zaključujemo da je

$$\begin{pmatrix} y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x \\ -\frac{1}{3}x \end{pmatrix}$$

partikularno rješenje nehomogenog sistema.

Odrediti opšte rješenje sistema linearnih jednačina

$$y_1' = y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 1$$

$$y_2' = -y_1 + 2y_2 + y_3$$

$$y_3' = 3y_2 - y_3 + x$$

Rj: Odredićemo prvo opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema jednačina.

$$\begin{aligned} y_1 - y_1' + 3y_2 - 2y_3 &= 0 \\ -y_1 + 2y_2 - y_2' + y_3 &= 0 \\ 3y_2 - y_3 - y_3' &= 0 \end{aligned}$$

Rješenja su u obliku

$$y_1 = A_1 e^{\lambda x}$$

$$y_2 = A_2 e^{\lambda x}$$

$$y_3' = A_3 e^{\lambda x}$$

Determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k + (II_k + III_k)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -2 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{=\!=\!=}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

Karakteristična jednačina $(2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$ ima korijene $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = 2$.

a) za $\lambda_1 = -1$ dati sistem ima oblik

$$\left.\begin{aligned} 2A_1+3A_2-2A_3&=0\\ -A_1+3A_2+A_3&=0\\ \hline 3A_2\quad&=0 \Rightarrow A_2=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2A_1-2A_3&=0\\ -A_1+A_3&=0\\ \hline A_1&=A_3\end{aligned}$$

(gdje je A_3 proizvoljno)

Ako za A_3 uzmemo 1 imamo

$$\begin{pmatrix} Y_1^{(1)}\\ Y_2^{(1)}\\ Y_3^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-x} \quad \text{tj.} \quad Y_1^{(1)}=e^{-x},\ Y_2^{(1)}=0,\ Y_3^{(1)}=e^{-x}$$

b) $\lambda_2=1$, sistem ima oblik

$$\begin{aligned} 3A_2-2A_3&=0\\ -A_1+A_2+A_3&=0\\ 3A_2-2A_3&=0\end{aligned} \Rightarrow A_1=\frac{5}{3}A_3,\quad A_2=\frac{2}{3}A_3$$

A_3 proizvoljno

Ako za A_3 uzmemo 3

$$Y_1^{(2)}=5e^{x};\quad Y_2^{(2)}=2e^{x},\quad Y_3^{(2)}=3e^{x} \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}e^{x}.$$

c) $\lambda_3=2$, sistem postaje

$$\begin{aligned} -A_1+3A_2-2A_3&=0\\ -A_1\qquad +A_3&=0\\ 3A_2-3A_3&=0\end{aligned} \Rightarrow A_1=A_2=A_3$$

A_3 proizvoljno

Za $A_3=1$ $\quad Y_1^{(3)}=e^{2x},\quad Y_2^{(3)}=e^{2x},\quad Y_3^{(3)}=e^{2x}$

Opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema je

$$\begin{aligned} Y_1&=C_1e^{-x}+5C_2e^{x}+C_3e^{2x}\\ Y_2&=\qquad\quad 2C_2e^{x}+C_3e^{2x}\\ Y_3&=C_1e^{-x}+3C_2e^{x}+C_3e^{2x}\end{aligned}$$

Pomoću metode varijacije konstanti sada tražimo opšte rješenje nehomogenog sistema jednačina u obliku

$$\begin{aligned} Y_1&=C_1(x)e^{-x}+5C_2(x)e^{x}+C_3(x)e^{2x}\\ Y_2&=\qquad\qquad 2C_2(x)e^{x}+C_3(x)e^{2x} \qquad \ldots(1)\\ Y_3&=C_1(x)e^{-x}+3C_2(x)e^{x}+C_3(x)e^{2x}\end{aligned}$$

pri čemu izvode $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ i $C_3'(x)$ f-ja $C_1(x)$, $C_2(x)$ i $C_3(x)$ određujemo iz sistema:

$$\begin{aligned} C_1'e^{-x}+5C_2'e^{x}+C_3'e^{2x}&=1\\ 2C_2'e^{x}+C_3'e^{2x}&=0\\ C_1'e^{-x}+3C_2'e^{x}+C_3'e^{2x}&=x\end{aligned}$$

Ovaj sistem riješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & 5e^{x} & e^{2x} & 1\\ 0 & 2e^{x} & e^{2x} & 0\\ e^{-x} & 3e^{x} & e^{2x} & x\end{array}\right] \overset{III_v+I_v\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & 5e^{x} & e^{2x} & 1\\ 0 & 2e^{x} & e^{2x} & 0\\ 0 & -2e^{x} & 0 & x-1\end{array}\right] \sim$$

$$\overset{III_v+II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & 5e^{x} & e^{2x} & 1\\ 0 & 2e^{x} & e^{2x} & 0\\ 0 & 0 & e^{2x} & x-1\end{array}\right] \underset{I_v+III_v(-1)}{\overset{II_v+III_v(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & 5e^{x} & 0 & 2-x\\ 0 & 2e^{x} & 0 & 1-x\\ 0 & 0 & e^{2x} & x-1\end{array}\right] \underset{III_v\cdot e^{-2x}}{\overset{II_v:2}{\sim}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & 5e^{x} & 0 & 2-x\\ 0 & e^{x} & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\\ 0 & 0 & 1 & (x-1)e^{-2x}\end{array}\right] \overset{I_v+II_v\cdot(-5)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & 0 & 0 & \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\\ 0 & e^{x} & 0 & \frac{1}{2}(1-x)\\ 0 & 0 & 1 & (x-1)e^{-2x}\end{array}\right]$$

Prema tome

$$C_1' = \frac{1}{2}(3x-1)e^{x}, \quad C_2' = \frac{1}{2}(1-x)e^{-x} \quad i \quad C_3' = (x-1)e^{-2x}$$

Integracijom posljednjih jednačina dobijamo

$$C_1 = \left(\frac{3}{2}x-2\right)e^{x} + D_1, \quad C_2 = \frac{x}{2}e^{-x} + D_2 \quad i \quad C_3 = \frac{1-2x}{4}e^{-2x} + D_3$$

cor(2)

U skalarnom obliku opšte rješenje glasi:

$$Y_1 = D_1 e^{-x} + 5D_2 e^{x} + D_3 e^{2x} + \frac{14x-7}{4}$$

$$Y_2 = 2D_2 e^{x} + D_3 e^{2x} + \frac{1+2x}{4}$$

$$Y_3 = D_1 e^{-x} + 3D_2 e^{x} + D_3 e^{2x} + \frac{10x-7}{4}$$

(opšte rješenje smo dobili zamjenom dobijenih izraza iz (2) u (1)).

Riješiti sistem linearnih jednačina

$$x' = x - y + \frac{1}{\cos t}$$

$$y' = 2x - y$$

Rj. Prvo riješimo odgovarajući homogeni sistem

$$\begin{aligned} x - x' - y &= 0 \\ 2x - y - y' &= 0 \end{aligned} \quad \ldots (1)$$

Matrica sistema je
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Rješenja ovog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$.
Ako ovo uvrstimo u (1) poslije dijeljenja sa $e^{\lambda t}$ imamo

$$\begin{aligned} (1-\lambda)A - B &= 0 \\ 2A + (-1-\lambda)B &= 0 \end{aligned}$$

Odredimo A i B.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)+2 = -1-\underbrace{\lambda+\lambda}+\lambda^2+2 = \lambda^2+1 = (\lambda-i)(\lambda+i)$$

Karakteristična jednačina $\lambda^2 + 1 = 0$ ima korijene $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$.

(a) Za $\lambda_1 = i$ imamo

$$(1-i)(1+i) = 1-i^2 = 2$$

$$\begin{aligned} (1-i)A - B &= 0 \quad /(1+i) \\ 2A + (-1-i)B &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A - (1+i)B &= 0 \\ 2A - (1+i)B &= 0 \end{aligned}$$

$$B = (1-i)A$$

Ako za A uzmemo 1, imamo:

$$x_1 = e^{it}$$
$$y_1 = (1-i)e^{it}$$

b) Za $\lambda = -i$ imamo
$$\begin{array}{l} (1+i)A - B = 0 \\ 2A - (1-i)B = 0 \end{array} \qquad B = (1+i)A$$

Ako za A uzmemo 1
$$x_2 = e^{-it}$$
$$y_2 = (1+i)e^{-it}$$

Paru imaginarnih rješenja $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ možemo pridružiti par realnih rješenja.

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$
$$e^{-it} = \cos t - i\sin t$$
$$(1-i)e^{it} = (1-i)\cos t + i(1-i)\sin t$$
$$(1+i)e^{-it} = (1+i)\cos t - i(1+i)\sin t$$
$$i(1-i) + i(-1-i) = i + 1 - i + 1 = 2$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \cos t$$
$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \cos t + \sin t$$
$$\tilde{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{2i} = \sin t$$
$$\tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = \sin t - \cos t$$

Rješenje homogenog sistema je
$$x = C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 = C_1\cos t + C_2\sin t$$
$$y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\sin t - \cos t)$$

Sada ćemo metodom varijacije konstanti tražiti opšte rješenje datog nehomogenog sistema u obliku

$$x(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$$
$$y(t) = C_1(t)(\cos t + \sin t) + C_2(t)(\sin t - \cos t)$$

pri čemu izvode f-ja $C_1(t)$ i $C_2(t)$ određujemo iz sistema

$$C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = \frac{1}{\cos t}$$
$$C_1'(t)(\cos t + \sin t) + C_2'(t)(\sin t - \cos t) = 0$$

gdje nehomogeni dio ovog sistema je nehomogeni dio sistema diferencijalnih jednačina. Sistem rješimo Kronecker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos t & \sin t & \frac{1}{\cos t} \\ \cos t + \sin t & \sin t - \cos t & 0 \end{array}\right] \underset{II_v - I_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} \cos t & \sin t & \frac{1}{\cos t} \\ \sin t & -\cos t & -\frac{1}{\cos t} \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{I_v\cdot\sin t \\ II_v\cdot\cos t}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} \sin t\cos t & \sin^2 t & \frac{\sin t}{\cos t} \\ \sin t\cos t & -\cos^2 t & -1 \end{array}\right] \underset{II_v - I_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} \sin t\cos t & \sin^2 t & \frac{\sin t}{\cos t} \\ 0 & -1 & -1-\frac{\sin t}{\cos t} \end{array}\right]$$

$$\underset{II_v\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} \sin t\cos t & \sin^2 t & \frac{\sin t}{\cos t} \\ 0 & 1 & 1+\frac{\sin t}{\cos t} \end{array}\right] \underset{I_v + II_v\cdot(-\sin^2 t)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} \sin t\cos t & 0 & \sin t\cos t - \sin^2 t \\ 0 & 1 & 1+\frac{\sin t}{\cos t} \end{array}\right]$$

$$\frac{\sin t}{\cos t} - \sin^2 t - \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{\sin t - \sin^2 t\cos t - \sin^3 t}{\cos t} = \frac{\sin t\overbrace{(1-\sin^2 t)}^{\cos^2 t} - \sin^2 t\cos t}{\cos t}$$
$$= \sin t\cos t - \sin^2 t$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(t) = 1 - \frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{i} \quad C_2'(t) = 1 + \frac{\sin t}{\cos t}$$

Dakle

$$c_1(t)=\int\left(1-\frac{\sin t}{\cos t}\right)dt=t+\ln|\cos t|+D_1$$

$$c_2(t)=\int\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right)dt=t-\ln|\cos t|+D_2$$

Opšte rješenje sistema je

$$x(t)=(t+\ln|\cos t|+D_1)\cos t+(t-\ln|\cos t|+D_2)\sin t$$
$$=D_1\cos t+D_2\sin t+(\cos t+\sin t)t+(\cos t-\sin t)\ln|\cos t|$$

$$y(t)=(t+\ln|\cos t|+D_1)(\cos t+\sin t)+$$
$$+(t-\ln|\cos t|+D_2)(\sin t-\cos t)$$

$$=(\cos t+\sin t)D_1+(\sin t-\cos t)D_2$$
$$+2t\sin t+2\cos t\ln|\cos t|$$

(#) Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x}=4x+y-36t$$
$$\dot{y}=-2x+y-2e^t$$

Rj.

Prvo riješimo odgovarajući homogeni sistem

$$\begin{aligned}\dot{x}&=4x+y\\ \dot{y}&=-2x+y\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}4x-\dot{x}+y&=0\\ -2x+y-\dot{y}&=0\end{aligned}\qquad\ldots(1)$$

Matrica sistema je $\begin{bmatrix}4 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$.

Rješenja homogenog sistema su oblika $x=Ae^{\lambda t}$, $y=Be^{\lambda t}$

Ako ovo uvrstimo u (1) poslije dijeljenja sa $e^{\lambda t}$ imamo

$$(4-\lambda)A+B=0$$
$$-2A+(1-\lambda)B=0$$

Odredimo A i B.

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 1\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)+2=4-5\lambda+\lambda^2+2=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Karakteristična jednačina $\lambda^2-5\lambda+6=0$ ima korjene $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$.

a) $\lambda=2$ sistem postaje

$$\begin{aligned}2A+B&=0\\ -2A-B&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad B=-2A$$

Ako za A uzmemo 1 $\quad x_1=e^{2t},\ y_1=-2e^{2t}$

b) Za $\lambda=3$ sistem postaje

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ -2A-2B&=0 \end{aligned} \qquad B=-A$$

Ako za A uzmemo 1

$$x_2 = e^{3t}, \quad y_2 = -e^{3t}$$

Rješenje odgovarajućeg homogenog sistema je

$$x_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

$$y_h = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}$$

Sada metodom varijacije konstanti tražimo opće rješenje polaznog sistema u obliku

$$x = C_1(t) e^{2t} + C_2(t) e^{3t}$$

$$y = -2C_1(t) e^{2t} - C_2(t) e^{3t} \qquad \ldots (2)$$

pri čemu izvode C_1', C_2' f-ja $C_1(t)$ i $C_2(t)$ određujemo iz sistema

$$C_1'(t) e^{2t} + C_2'(t) e^{3t} = -36t$$

$$-2C_1'(t) e^{2t} - C_2'(t) e^{3t} = -2e^{t}$$

Ovaj sistem rješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{3t} & -36t \\ -2e^{2t} & -e^{3t} & -2e^{t} \end{array}\right] \overset{II_v + I_v \cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{3t} & -36t \\ 0 & e^{3t} & -2e^{t} - 72t \end{array}\right] \overset{I_v - II_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} e^{2t} & 0 & 2e^{t} + 36t \\ 0 & e^{3t} & -2e^{t} - 72t \end{array}\right] \underset{II_v \cdot e^{-3t}}{\overset{I_v \cdot e^{-2t}}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2e^{-t} + 36t e^{-2t} \\ 0 & 1 & -2e^{-2t} - 72t e^{-3t} \end{array}\right]$$

Prema tome

$$C_1'(t) = 36t\, e^{-2t} + 2e^{-t}$$

$$C_2'(t) = -72t\, e^{-3t} - 2e^{-2t}$$

Odavdje

$$C_1(t) = \int (36t\, e^{-2t} + 2e^{-t})\, dt = \ldots \text{ za vježbu}$$

$$\ldots = -2e^{-t} - 18t\, e^{-2t} - 9e^{-2t} + D_1$$

$$C_2(t) = \int (-72\, t e^{-3t} - 2e^{-2t})\, dt = \ldots \text{ za vježbu}$$

$$\ldots = e^{2t} + 24t\, e^{-3t} + 8e^{-3t} + D_2$$

Uvrštavanjem u (2) dobijamo

$$x(t) = D_1 e^{2t} + D_2 e^{3t} - e^{t} + 6t - 1$$

$$y(t) = -2D_1 e^{2t} - D_2 e^{3t} + 12t + 3e^{t} + 10$$

traženo opće rješenje

Zadaci za vježbu

1. Riješiti sistem linearnih diferencijalnih jednačina

a)
$$\dot{x} = x + y + 2e^{t}$$
$$\dot{y} = 4x + y - e^{t}$$

b)
$$\dot{x} = 2y + 2$$
$$\dot{y} = -x + 3y + e^{-3t}$$

c)
$$\dot{x} - 3x + 4y = e^{-2t}$$
$$\dot{y} - x + 2y = -3e^{-2t}$$

d)
$$\dot{x} = y + 2e^{t}$$
$$\dot{y} = x + t$$

e)
$$\dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^{t}-1}$$
$$\dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^{t}-1}$$

f)
$$\dot{x} = y + tg^{2} t - 1$$
$$\dot{y} = -x + tg\, t$$

Rješenja

a)
$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{4} e^{t}$$
$$y(t) = 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t} - 2e^{t}$$

b)
$$x(t) = 2C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{10} e^{-3t} - 3$$
$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - \frac{3}{20} e^{-3t} - 1$$

Metod pogađanja partikularnog rješenja

\# Riješiti sistem jednačina

$$\dot{x} = y - 5\cos t$$
$$\dot{y} = 2x + y$$

Rj: Riješimo prvo odgovarajući homogeni sistem

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = 2x + y$$

Matrica sistema je $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Za početak rješenja homogenog sistema tražimo u obliku $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$. Uvrštavajući ovo u homogeni sistem, nakon prebacivanja svih promjenjivih na jednu stranu i dijeljenjem sa $e^{\lambda t}$ dobijamo

$$-\lambda A + B = 0 \qquad \ldots(1)$$
$$2A + (1-\lambda)B = 0$$

Odredimo koeficijente A i B. Determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

Karakteristična jednačina sistema $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ima korijene $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$.

a) Za $\lambda = 2$ sistem (1) postaje

$$\begin{aligned} -2A + B &= 0 \\ 2A - B &= 0 \end{aligned} \qquad A = 1, \quad B = 2$$

$$\Rightarrow x_1(t) = e^{2t}, \quad y_1(t) = 2e^{2t}$$

b) Za $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} -A - B &= 0 \\ -2A - 2B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow B = -A$$

Ako za A uzmemo 1 imamo $A = 1$, $B = -1$

$$x_2(t) = e^{-t} \qquad y_2(t) = -e^{-t}$$

Opšte rješenje homogenog sistema je $\boxed{x_h = x_1 + x_2, \; y_h = y_1 + y_2}$

$$x_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$$
$$y_h(t) = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$$

Rješenje nehomogenog sistema tražimo u obliku

$$x = x_h + x_p$$
$$y = y_h + y_p$$

Partikularna rješenja pronađimo metodom pogađanja partikularnog rješenja. Ovu metodu koristimo ako su svi nehomogeni dijelovi oblika

$$P_m(t) e^{\alpha t} \cos\beta t \quad \text{ili} \quad P_m(t) e^{\alpha t} \sin\beta t$$

gdje je $P_m(t)$ polinom reda m. Tada je partikularno rješenje oblika (za tri promjenjive)

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k^1 \\ Q_k^2 \\ Q_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t} \cos\beta t + \begin{bmatrix} R_k^1 \\ R_k^2 \\ R_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t} \sin\beta t$$

gdje su Q_k^i i R_k^i polinomi reda $k = m + l$, a l je višestrukost $\alpha + \beta i$ kao korijena karakteristične jednačine.

Jedini nehomogeni dio je $-5\cos t$.

$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \Rightarrow m=0,\ \alpha=0,\ \beta=1$

$\alpha+i\beta=i$, i nije korijen karakteristične jedn. $\Rightarrow l=0$

$k=m+l=0 \Rightarrow$ Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}\sin t$$

Do konstanti dolazimo uvrštavajući partikularno rješenje u sistem koji od nehomogenih djelova ima samo onaj koji posmatramo.

$$-A\sin t + C\cos t = B\cos t + D\sin t - 5\cos t$$
$$-B\sin t + D\cos t = 2A\cos t + 2C\sin t + B\cos t + D\sin t$$

$$A+D=0 \Rightarrow$$
$$B-C=5$$
$$2C+B+D=0$$
$$2A+B-D=0$$

$A=-1$

$B=3$

$C=-2 \quad D=1$

$\Uparrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x_p = -\cos t - 2\sin t$

$y_p = 3\cos t + \sin t$

Opšte rješenje sistema je

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - \cos t - 2\sin t$$
$$y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + 3\cos t + \sin t$$

(#) Riješiti sistem jednačina

$$\dot{x} = 2x + y - 7te^{-t}$$
$$\dot{y} = -x + 2y - 1$$

Rj: Riješimo prvo odgovarajući homogeni sistem

$$\dot{x} = 2x + y$$
$$\dot{y} = -x + 2y \qquad \text{Matrica sistema je } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rješenja homogenog sistema tražimo u obliku $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$. Uvrštavajući ovo u homogeni sistem, nakon prebacivanja svih promjenjivih na jednu stranu i dijeljenjem sa $e^{\lambda t}$ dobijamo

$$(2-\lambda)A + B = 0$$
$$-A + (2-\lambda)B = 0 \qquad \dots(1)$$

Odredimo koeficijente A i B. Determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$
$$D = 16 - 20 = -4$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Korijeni karakteristične jednačine sistema $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ $\lambda_1 = 2+i$ i $\lambda_2 = 2-i$.

a) Za $\lambda = 2+i$ sistem (1) postaje $\begin{matrix} -iA + B = 0 \\ -A - iB = 0 \end{matrix} \Rightarrow A = -iB$

$\Rightarrow$ Ako je $A = 1 \Rightarrow B = i$

$$\bar{x}_1(t) = e^{(2+i)t} = e^{2t} \cdot e^{it} = e^{2t}(\cos t + i \sin t)$$
$$\bar{y}_1(t) = ie^{(2+i)t} = e^{2t}(-\sin t + i\cos t)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} e^{2t} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \bar{z}_1 = a + ib \\ \bar{z}_2 = a - ib \\ \Downarrow \\ \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2} = a \quad \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{2i} = b \end{matrix}}$$

Na osnovu ovog rješenja možemo zaključiti da je

$$x_h(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^{2t}$$
$$y_h(t) = (-c_1 \sin t + c_2 \cos t)e^{2t}$$

Partikularno rješenje odredimo metodom pogađanja partikularnog rješenja. Ovu metodu koristimo ako su svi nehomogeni dijelovi oblika

$$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{ili} \quad P_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gdje je $P_m(t)$ polinom reda m. Tada je partikularno rješenje oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k^1 \\ Q_k^2 \end{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t + \begin{bmatrix} R_k^1 \\ R_k^2 \end{bmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gdje su Q_k^i i R_k^i polinomi reda $k = m + \ell$, a ℓ je višestrukost od $\alpha + i\beta$ kao korijena karakteristične jednačine.

a) Posmatrajmo nehomogeni dio $-7te^{-t}$

$$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \Rightarrow m=1,\ \alpha=-1,\ \beta=0$$

$\alpha+i\beta=-1$, -1 nije korijen karakter. jedn $\Rightarrow l=0$

$k=m+l=1 \Rightarrow$ Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At+B \\ Ct+D \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$x_p=(At+B)e^{-t} \Rightarrow \dot{x}_p = Ae^{-t}+(At+B)\cdot(-1)e^{-t} = = (-At+(A-B))e^{-t}$$

$$y_p=(Ct+D)e^{-t} \Rightarrow \dot{y}_p = Ce^{-t}+(Ct+D)e^{-t}\cdot(-1) = =(-Ct+(C-D))e^{-t}$$

Do konstanti dolazimo uvrštavajući partikularno rješenje u sistem koji od nehomogenih dijelova ima samo onaj koji posmatramo

$$\dot{x}=2x+y-7te^{-t}$$
$$\dot{y}=-x+2y$$

← u ovom dijelu smo "izbacili" -1

$$(-At+(A-B))e^{-t}=(2A+C)te^{-t}+(2B+D)e^{-t}-7te^{-t}$$
$$(-Ct+(C-D))e^{-t}=(-A+2C)te^{-t}+(-B+2D)e^{-t}$$

$$3A+C=7$$
$$-A+3B+D=0$$
$$-A+3C=0$$
$$-B-C+3D=0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 21/10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 14/25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21/50 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A=\frac{21}{10},\quad B=\frac{14}{25},\quad C=\frac{7}{10},\quad D=\frac{21}{50}$$

$$x_{p_1}=\left(\frac{21}{10}t+\frac{14}{25}\right)e^{-t}$$
$$y_{p_1}=\left(\frac{7}{10}t+\frac{21}{50}\right)e^{-t}$$

b) Sad posmatrajmo drugi nehomogeni dio -1

$$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \Rightarrow m=0,\ \alpha=0,\ \beta=0$$

$\alpha+i\beta=0$, nula nije korijen karakt. jedn $\Rightarrow l=0$

$k=m+l=0 \Rightarrow$ Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Konstante A i C ćemo odrediti uvrštavajući ovo partikularno rješenje u sistem koji od nehomogenih djelova ima samo onaj koji posmatramo.

$x_p = A \quad \dot{x}_p = 0, \qquad y_p = B, \ \dot{y}_p = 0$

$$\begin{aligned} 2A + B &= 0 \\ -A + 2B &= 1 \quad /\cdot 2 \\ \hline 2A + B &= 0 \\ + \ -2A + 4B &= 2 \\ \hline 5B &= 2 \Rightarrow B = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$-A + \frac{4}{5} = 1$$

$$A = -\frac{1}{5}$$

$$x_{p_2} = -\frac{1}{5}$$

$$x_{p_2} = \frac{2}{5}$$

Opšte rješenje datog sistema je

$$x = \underbrace{(c_1 \cos t + c_2 \sin t) e^{2t}}_{x_h} + \underbrace{\left(\frac{21}{10} t + \frac{14}{25}\right) e^{-t}}_{x_{p_1}} \underbrace{- \frac{1}{5}}_{x_{p_2}}$$

$$y = \underbrace{(-c_1 \sin t + c_2 \cos t) e^{2t}}_{y_h} + \underbrace{\left(\frac{7}{10} t + \frac{21}{50}\right) e^{-t}}_{y_{p_1}} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{y_{p_2}}$$

\# Riješiti sistem jednačina

$$x' = 2x - y - z + e^{2t}$$
$$y' = 3x - 2y - 3z + \cos t$$
$$z' = -x + y + 2z + e^{t}$$

Rj. Riješimo prvo odgovarajući homogeni sistem

$$x' = 2x - y - z$$
$$y' = 3x - 2y - 3z$$
$$z' = -x + y + 2z$$

Matrica sistema je $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ako u sistem uvrstimo $x = Ae^{\lambda x}$, $y = Be^{\lambda x}$, $z = Ce^{\lambda x}$, poslije sređivanja i dijeljenja sa $e^{\lambda x}$ dobićemo

$$(2-\lambda)A - B - C = 0$$
$$3A + (-2-\lambda)B - 3C = 0$$
$$-A + B + (2-\lambda)C = 0$$

Odredimo koeficijente A, B i C. Determinanta zadnjeg sistema je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_v + III_v}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{I_k - III_k}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -2-\lambda & -3 \\ \lambda-3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 6 & -2-\lambda \\ \lambda-3 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(6 + (2+\lambda)(\lambda-3)\right)$$

$$= (1-\lambda)(6 + 2\lambda + \lambda^2 - 6 - 3\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-1)$$

Karakteristična jednačina sistema je $\lambda(1-\lambda)(\lambda-1)=0$ i njeni korijeni su $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ i $\lambda_3=1$.

Kako je $\lambda_2=1$ korijen višestrukosti dva, opšte rješenje homogenog sistema tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} P_k(t) \\ Q_k(t) \\ R_k(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

ili

$$x(t)=\underbrace{A_1 e^{\lambda_1 t}}_{x_1(t)}+\underbrace{P_k(t) e^{\lambda_2 t}}_{x_2(t)}$$
$$y(t)=A_2 e^{\lambda_1 t}+Q_k(t) e^{\lambda_2 t}$$
$$z(t)=A_3 e^{\lambda_1 t}+Q_k(t) e^{\lambda_2 t}$$

gdje su P_k, Q_k i R_k polinomi reda k, a $k=r+s-n$ gdje je

- r rang matrice $A-\lambda_2 I$
- s višestrukost korijena
- n red sistema

$$A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{III_v+I_v}{\overset{II_v+I_v(-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A-\lambda_2 I)=1$$

$$k=r+s-n=1+2-3=0$$

$$\Rightarrow \quad x=A_1 e^{0t}+B_1 e^t=A_1+B_1 e^t$$
$$y=A_2+B_2 e^t$$
$$z=A_3+B_3 e^t \qquad \ldots(1)$$

Ako (1) uvrstimo u datu jednačinu sistema dobijemo

$$B_1 e^t=2A_1+2B_1 e^t-A_2-B_2 e^t-A_3-B_3 e^t$$
$$B_2 e^t=3A_1+3B_1 e^t-2A_2-2B_2 e^t-3A_3-3B_3 e^t$$
$$B_3 e^t=-A_1-B_1 e^t+A_2+B_2 e^t+2A_3+2B_3 e^t$$

$$2A_1-A_2-A_3=0$$
$$B_1-B_2-B_3=0$$
$$3A_1-2A_2-3A_3=0$$
$$3B_1-3B_2-3B_3=0$$
$$-A_1+A_2+2A_3=0$$
$$-B_1+B_2+B_3=0$$

$$2A_1-A_2-A_3=0$$
$$3A_1-2A_2-3A_3=0$$
$$-A_1+A_2+2A_3=0$$

$$\vdots$$

$$A_1+A_3=0 \qquad A_1=-A_3$$
$$A_2+3A_3=0 \qquad A_2=-3A_3$$

$$B_1-B_2-B_3=0$$
$$B_1=B_2+B_3$$

Tri promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $A_3=-C_1$

$$B_2=C_2 \quad ; \quad B_3=C_3$$

Opšte rješenje homogenog sistema je

$$x_h(t)=C_1+C_2 e^t+C_3 e^t$$
$$y_h(t)=3C_1+C_2 e^t$$
$$z_h(t)=-C_1+C_3 e^t$$

Sad dati nehomogeni sistem rješimo metodom pogađanja partikularnog rješenja. Ovu metodu koristimo ako su svi nehomogeni dijelovi oblika

$$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{ili} \quad P_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gdje je $P_m(t)$ polinom reda m.

Tada je partikularno rješenje oblika

$$\begin{bmatrix} x_p\\ y_p\\ z_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_k^1\\ Q_k^2\\ Q_k^3\end{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t + \begin{bmatrix}R_k^1\\ R_k^2\\ R_k^3\end{bmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gdje su Q_k^i i R_k^i polinomi reda $k=m+l$, a l je višestrukost $\alpha+\beta i$ kao korijena karakteristične jednačine.

a) Posmatrajmo prvo nehomogeni dio e^{2t}. Taj dio je oblika $P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \Rightarrow m=0,\ \alpha=2,\ \beta=0$

$\Rightarrow$ 2 ima višestrukost nula kao korijen kar. jednač. $\Rightarrow l=0$

$\Rightarrow k=0 \Rightarrow$ Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_1}\\ y_{p_1}\\ z_{p_1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A'\\ B'\\ C'\end{bmatrix} e^{2t}$$

Do konstanti A', B', C' dolazimo uvrštavajući partikularno rješenje u sistem gdje od nehomogenih dijelova jedino ostavljamo onaj koji posmatramo

$$2A'e^{2t} = 2A'e^{2t} - B'e^{2t} - C'e^{2t} + e^{2t}$$

$$2B'e^{2t} = 3A'e^{2t} - 2B'e^{2t} - 3C'e^{2t} \quad \leftarrow \text{u ovoj jednačini smo izbacili } \cos t$$

$$2C'e^{2t} = -A'e^{2t} + B'e^{2t} + 2C'e^{2t} \quad \leftarrow \text{u ovoj jednačini smo izbacili nehomogeni dio } e^{t}$$

$$\begin{aligned} -B' - C' &= -1\\ 3A' - 4B' - 3C' &= 0\\ -A' + B' &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow A' = \frac{3}{2},\ B' = \frac{3}{2},\ C' = -\frac{1}{2}$$

b) Posmatrajmo nehomogeni dio $\cos t$. Taj dio je oblika

$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \Rightarrow m=0,\ \alpha=0,\ \beta=1$

i je korijen višestrukosti nula $\Rightarrow l=0 \Rightarrow k=m+l=0$

Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_2}\\ y_{p_2}\\ z_{p_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\\ B\\ C\end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix}D\\ E\\ F\end{bmatrix} \sin t$$

Do konstanti dolazimo uvrštavanjem partikularnog rješenja u sistem koji od nehomogenih dijelova ima samo onaj koji posmatramo.

$$-A\sin t + D\cos t = 2A\cos t + 2D\sin t - B\cos t - E\sin t - C\cos t - F\sin t$$

$$-B\sin t + E\cos t = 3A\cos t + 3D\sin t - 2B\cos t - 2E\sin t - 3C\cos t - 3F\sin t + \cos t$$

$$-C\sin t + F\cos t = -A\cos t - D\sin t + B\cos t + E\sin t + 2C\cos t + 2F\sin t$$

$$\begin{aligned} A + 2D - E - F &= 0\\ 2A - B - C - D &= 0\\ B + 3D - 2E - 3F &= 0\\ 3A - 2B - 3C - E &= -1\\ C - D + E + 2F &= 0\\ -A + B + 2C - F &= 0 \end{aligned}$$

Rješenjem sistema dobijamo

$$A=\frac{1}{2},\ B=1,\ C=-\frac{1}{2},\ D=\frac{1}{2},\ E=2,\ F=-\frac{1}{2}$$

c) Ostalo je još da posmatramo e^t. Iz $P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$

$$\Rightarrow \quad m=0,\ \alpha=1,\ \beta=0$$

Korijen 1 je višestrukosti dva kao korijen karakteristične jednačine. $\Rightarrow l=2 \quad \Rightarrow k=m+l=2$

Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_3} \\ y_{p_3} \\ z_{p_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x t^2 + B_x t + C_x \\ A_y t^2 + B_y t + C_y \\ A_z t^2 + B_z t + C_z \end{bmatrix} e^t .$$

Do konstanti dolazimo uvrštavanjem partikularnog rješenja u sistem koji od nehomogenih djelova ima samo onaj koji posmatramo.

$$(2A_x t + B_x)e^t + (A_x t^2 + B_x t + C_x)e^t = (2A_x - A_y - A_z)t^2 e^t + (2B_x - B_y - B_z)te^t + (2C_x - C_y - C_z)e^t$$

$$(2A_y t + B_y)e^t + (A_y t^2 + B_y + C_y)e^t = (3A_x - 2A_y - 3A_z)t^2 e^t + (3B_x - 2B_y - 3B_z)te^t + (3C_x - 2C_y - 3C_z)e^t$$

$$(2A_z t + B_z)e^t + (A_z t^2 + B_z t + C_z)e^t = (-A_x + A_y + 2A_z)t^2 e^t + (-B_x + B_y + 2B_z)te^t + (-C_x + C_y + 2C_z)e^t + e^t$$

$$\begin{aligned}
A_x - A_y - A_z &= 0 \\
-2A_x + B_x - B_y - B_z &= 0 \\
-B_x + C_x - C_y - C_z &= 0 \\
3A_x - 3A_y - 3A_z &= 0 \\
-2A_y + 3B_x - 3B_y - 3B_z &= 0 \\
-B_y + 3C_x - 3C_y - 3C_z &= 0 \\
-A_x + A_y + A_z &= 0 \\
-2A_z - B_x + B_y + B_z &= 0 \\
-B_z - C_x + C_y + C_z &= -1
\end{aligned}$$

...

Rješenje sistema je

$A_x=0,\ A_y=0\ \ A_z=0$

$B_x=-1,\ B_y=-3,\ B_z=2$

$$C_x - C_y - C_z = -1$$

$$C_x = C_y + C_z - 1$$

Opšte rješenje nehomogenog sistema tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

U našem slučaju

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^t + \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \quad + D_1 + D_2 - 1)e^t$$

$$y(t) = 3C_1 + C_2 e^t + \frac{3}{2}e^{2t} + \cos t + 2\sin t \quad 3t + D_1)e^t$$

$$z(t) = -C_1 + C_3 e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + (2t + D_2)e^t$$

je traženo opšte rješenje.

(C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 su proizvoljne konstante).

Zadaci za vježbu

(1) Riješiti sistem jednačina

(a)
$$6u'-u-7v+5w=10e^x$$
$$2v'+u+v-w=0$$
$$3w'-u+2v-w=e^x$$

(b)
$$\frac{dx}{dt}+2x+y=\sin t$$
$$\frac{dy}{dt}-4x-2y=\cos t$$

c)
$$\frac{du}{dx}+4v=\cos 2x$$
$$\frac{dv}{dx}+4u=\sin 2x$$

d)
$$\dot{x}=2x+y+2e^t$$
$$\dot{y}=x+2y-3e^{4t}$$

e)
$$\dot{x}=x-y-8t$$
$$\dot{y}=5x-y$$

f)
$$\dot{x}=2x-y$$
$$\dot{y}=2y-x-5e^t\sin t$$

Rješenja:

(a) $u=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+e^x$

$v=2C_1+\frac{1}{2}(C_3-C_2)\cos x-\frac{1}{2}(C_3+C_2)\sin x$

$w=3C_1-\frac{1}{2}(C_2+C_3)\cos x+\frac{1}{2}(C_2-C_3)\sin x+e^x$

b)
$x=1-2(t-\pi)+2\sin t$

$y=4(t-\pi)-2\cos t-3\sin t$

c)
$u=C_1e^{-4x}+C_2e^{4x}+\frac{1}{3}\sin 2x$

$v=C_1e^{-4x}-C_2e^{4x}+\frac{1}{10}\cos 2x$

Prvi integrali sistema

Pretpostavimo da je sistem diferencijalnih jednačina dat u obliku (normalni oblik)

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x,y_1,\dots,y_n)\\ \frac{dy_2}{dx}&=f_2(x,y_1,\dots,y_n)\\ &\vdots\\ \frac{dy_n}{dx}&=f_n(x,y_1,\dots,y_n)\end{aligned}\qquad\dots(1)$$

Ako za svako rješenje $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ sistema (1) f-ja $\phi(x,y_1,\dots,y_n)$ ima konstantnu vrijednost, tj. ako vrijedi

$$\phi(x,y_1,\dots,y_n)=C$$

pri čemu jednom rješenju odgovara jedna konstanta, onda se jednakost $\phi=C$ zove <u>prvi integral sistema (1)</u>.

<u>Primjer</u> (prvi integral sistema)

Neka je dat sistem

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=z\\ \frac{dz}{dx}&=y\end{aligned}\qquad\dots(2)$$

Rješenje ovog sistema je par (y,z) gdje je

$$y=\frac{1}{2}D_1e^x+\frac{1}{2}D_2e^{-x}\quad i\quad z=\frac{1}{2}D_1e^x-\frac{1}{2}D_2e^{-x},$$

D_1 i D_2 su konstante.

Posmatrajmo f-je $\phi_1 = (y+z)e^{-x}$ i $\phi_2 = (y-z)e^{x}$.
Kako je

$$\phi_1 = D_1 \quad \text{i} \quad \phi_2 = D_2$$

za rješenje sistema (2) to su ϕ_1 i ϕ_2 prvi integrali sistema (2).

Ako je poznato n prvih integrala

$$\phi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \qquad \dots (3)$$

koji su međusobno nezavisni, tj. za koje je funkcionalna determinanta

$$\frac{D(\phi_1, \dots, \phi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

različita od nule, onda je rješenje sistema (1) dato sa (3)

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y_1, \dots, y_n) &= C_1 \\ \phi_2(x, y_1, \dots, y_n) &= C_2 \\ &\vdots \\ \phi_n(x, y_1, \dots, y_n) &= C_n \end{aligned}$$

Prvi integrali se određuju pomoću kombinacija, koje omogućuju da se jednačina sistema može napisati kao izvod nekog izraza, pa se tako jednostavno integrali.

(#) Riješiti sistem

$$\frac{dy}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = y.$$

Rj. Sabiranjem datih jednačina dobijamo

$$\frac{dy + dz}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z \Rightarrow \frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| = C_1 + x$$

$$y + z = e^{C_1 + x}$$

$$y + z = D_1 e^{x}$$

Time je prvi integral $\phi_1 = (y+z)e^{-x} = D_1$

Oduzimanjem datih jednačina dobijamo

$$\frac{d(y-z)}{dx} = -(y-z) \Rightarrow \frac{d(y-z)}{y-z} = -dx \Rightarrow y - z = D_2 e^{-x}$$

Drugi prvi integral je $\phi_2 = (y-z)e^{x} = D_2$

Ovi integrali su međusobno nezavisni jer je

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{x} \end{vmatrix} = -e^0 - e^0 = -2 \neq 0$$

Iz sistema

$$(y+z)e^{-x} = D_1$$
$$(y-z)e^{x} = D_2$$

dobija se rješenje datog sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2} D_1 e^{x} + \tfrac{1}{2} D_2 e^{-x} \\ z &= \tfrac{1}{2} D_1 e^{x} - \tfrac{1}{2} D_2 e^{-x} \end{aligned}}$$

D_1, D_2 su proizv. realn. konst.

Riješiti sistem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{y}{z}$$

Rj. Iz prve jednačine sistena slijedi prvi integral

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = C_1 x \Rightarrow$$

$$\phi_1 = \frac{y}{x} = C_1$$

Da bi smo odredili drugi prvi integral, napisaćemo sistem u drugačijem obliku

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad /\cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{-y} = \frac{dx}{z} \quad /\cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$$

$$\frac{dz}{-xy} = \frac{dx}{xz} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-yx}$$

Iskoristimo osobinu proporcije: ako

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = t,$$

onda je

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n} = t$$

Na osnovu ove osobine imamo

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{yxz + xyz} = \frac{dz}{-xy}$$

$$\frac{d(xy)}{2xyz} = -\frac{dz}{xy}$$

$$d(xy) = -2z\,dz \Rightarrow xy = -z^2 + C_2$$

Drugi prvi integral je $\phi_2 = xy + z^2 = C_2$.

Da li su ϕ_1 i ϕ_2 međusobno nezavisni?

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ x & 2z \end{vmatrix} = \frac{2z}{x} \neq 0$$

Dobijeni prvi integrali su nezavisni, pa je opšte rješenje

$$y = y(x, C_1, C_2)$$

$$z = z(x, C_1, C_2)$$

dato sa

$$y = C_1 x$$

$$z = \pm\sqrt{C_2 - C_1 x^2}.$$

Sistem

$$y' = y^2 z$$

$$z' = \frac{z}{x} - yz^2$$

ima rješenje

$$y = C_2 e^{C_1 x^2}, \quad z = \frac{2C_1}{C_2} x e^{-C_1 x^2}, \quad y = 0, \quad z = Cx.$$

Izabrani zadaci za vježbu sa rješenjima

Homogeni sistem

8.1 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= x - y + 2z \end{aligned}$$

Rešenje: Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karakteristični koreni matrice A su

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Kako su svi koreni realni i različiti rešenje je oblika

$$\mathbf{x} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t},$$

gde su v_1, v_2, v_3 odgovarajući karakteristični vektori. U ovom slučaju rešenje je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t},$$

tj.

$$\begin{aligned} x &= c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ z &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \end{aligned}$$

8.2 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= 3x + z \end{aligned}$$

Rešenje: Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karakteristični koreni matrice A su

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + 2i, \quad \lambda_3 = 1 - 2i$$

Imamo par konjugovano kompleksnih rešenja i sva rešenja su različita.

$$\mathbf{x} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 Re(v_2 e^{\lambda_2 t}) + c_3 Im(v_2 e^{\lambda_2 t}),$$

gde su v_1 i v_2 odgovarajući karakteristični vektori. Za λ_3 ne tražimo karakterističan vektor.

Imamo da je

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ -3i \end{bmatrix}$$

Tada je

$$v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ -3i \end{bmatrix} e^t e^{2it} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ -3i \end{bmatrix} e^t(\cos 2t + i \sin 2t) = \begin{bmatrix} 2e^t \cos 2t + i2e^t \sin 2t \\ e^t \sin 2t - ie^t \cos 2t \\ 3e^t \sin 2t - 3ie^t \cos 2t \end{bmatrix}$$

Konačno, rešenje je

$$\begin{aligned} x &= c_2 e^t \cos 2t + c_3 2e^t \sin 2t \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^t \sin 2t - c_3 e^t \cos 2t \\ z &= -c_1 e^t + c_2 3e^t \sin 2t - c_3 3e^t \cos 2t \end{aligned}$$

□

8.3 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 2x - y - 2z \\ z' &= -x + y + 2z \end{aligned}$$

Rešenje: Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karakteristični koreni matrice A su

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Kako imamo višestruko koren, rešenje tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} P_k(t) \\ Q_k(t) \\ R_k(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t},$$

gde su P_k, Q_k i R_k polinomi reda k, a $k = r + s - n$, gde je r rang matrice $\lambda E - A$, s višestrukost korena, a n red sistema.

Tako je

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

pa je rang matrice jednak 1. Red polinoma je $k = 1 + 3 - 3 = 1$. Rešenje tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At + B \\ Ct + D \\ Et + F \end{bmatrix} e^t$$

Konstante A, B, C, D, E i F određujemo uvrštavanjem u sistem. Kako se radi o trostrukom korenu, tri konstante ćemo izraziti preko druge tri.

$$Ae^t + (At + B)e^t = 2(At + B)e^t - (Ct + D)e^t - (Et + F)e^t$$
$$Ce^t + (Ct + D)e^t = 2(At + B)e^t - (Ct + D)e^t - 2(Et + F)e^t$$
$$Ee^t + (Et + F)e^t = -(At + B)e^t + (Ct + D)e^t + 2(Et + F)e^t$$

Odatle dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} A &= C + E \\ A &= B - D - F \\ C &= 2B - 2D - 2F \\ E &= -B + D + F \end{aligned}$$

Rešavanjem dobijamo da je

$$A = -E \quad C = -2E \quad F = E + B - D$$

Proglasimo sada B,D i E za konstante c_1, c_2 i c_3 respektivno. Tada je

$$A = -c_3 \quad B = c_1 \quad C = -2c_3 \quad D = c_2 \quad E = c_3 \quad F = c_1 - c_2 + c_3,$$

pa je rešenje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_3 t + c_1 \\ -2c_3 t + c_2 \\ c_3 t + c_1 - c_2 + c_3 \end{bmatrix} e^t = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} -t \\ -2t \\ t+1 \end{bmatrix} e^t$$

□

8.4 Rešiti sistem:

$$\begin{aligned} x'' &= 2x - 3y \\ y'' &= x - 2y \end{aligned}$$

Rešenje: Ovakvi sistemi se uvek mogu rešiti uvođenjem novih zavisnih promenljivih i svođenjem na siszem linearnih jednačina prvog read. U ovom slučaju sistem je oblika

$$\begin{aligned} x' &= u \\ y' &= v \\ u' &= 2x - 3y \\ v' &= x - 2y \end{aligned}$$

Međutim, upošteno, kod homogenih sistema oblika

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x + b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_0 y = 0 \\ c_n x^{(n)} + c_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + c_0 x + d_n y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + d_0 y = 0 \end{aligned}$$

do karaketrističnih korena dolazimo iz jednačine

$$\begin{vmatrix} a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 & b_n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_0 \\ c_n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_0 & d_n \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_0 \end{vmatrix} = 0,$$

a zatim do odgovarajućih karakterističnih vektora rešavajući sistem

$$\begin{bmatrix} a_n \lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + a_0 & b_n \lambda_i^n + b_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + b_0 \\ c_n \lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + c_0 & d_n \lambda_i^n + d_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tako se u našem slučaju sistem može zapisati

$$\begin{aligned} x'' - 2x - 3y = 0 \\ -x + y'' + 2y = 0 \end{aligned}$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 2 & -3 \\ -1 & \lambda^2 + 2 \end{vmatrix} = 0$$

čije je rešenje

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -i.$$

Odgovarajući karaktersistični vektori su

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dok v_4 ne tražimo. Kako je

$$v_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t \end{bmatrix},$$

rešenje je

$$\begin{aligned} x &= 3c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \end{aligned}.$$

□

8.5 Metodom varijacije konstanti rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y + \tfrac{1}{\cos t} \\ y' &= 2x - y \end{aligned}$$

Rešenje: Prvo rešimo homogen sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= 2x - y \end{aligned}$$

Njegovo rešenje je

$$\begin{aligned} x_h &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y_h &= c_1(\cos t + \sin t) + c_2(\sin t - \cos t) \end{aligned}$$

Tada je rešenje nehomogenog sistema oblika

$$\begin{aligned} x &= c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t \\ y &= c_1(t)(\cos t + \sin t) + c_2(t)(\sin t - \cos t) \end{aligned}.$$

Funkcije $c_1(t)$ i $c_2(t)$ dobijamo iz sledećeg sistema lineranih jednačina

$$\begin{aligned} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t &= \tfrac{1}{\cos t} \\ c_1'(t)(\cos t + \sin t) + c_2'(t)(\sin t - \cos t) &= 0 \end{aligned},$$

gde nehomogeni deo ovog sistema je nehomogeni deo sistema diferencijalnih jednačina.

Sistem rešavamo Kramerovim pravilom. Tako je

$$D_S = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t + \sin t & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = -1$$

$$D_{c_1'} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos t} & \sin t \\ 0 & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = \frac{\sin t}{\cos t} - 1$$

$$D_{c_2'} = \begin{vmatrix} \cos t & \frac{1}{\cos t} \\ \cos t + \sin t & 0 \end{vmatrix} = -1 - \frac{\sin t}{\cos t}$$

Stoga je

$$c_1'(t) = 1 - \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$c_2'(t) = 1 + \frac{\sin t}{\cos t}$$

Dakle

$$c_1(t) = \int (1 - \frac{\sin t}{\cos t}) dt = t + \ln|\cos t| + c_1$$

$$c_2(t) = \int (1 + \frac{\sin t}{\cos t}) dt = t - \ln|\cos t| + c_2.$$

Rešenje je

$$\begin{aligned} x &= (t + \ln|\cos t| + c_1)\cos t + (t - \ln|\cos t| + c_2)\sin t \\ y &= (t + \ln|\cos t| + c_1)(\cos t + \sin t) + (t - \ln|\cos t| + c_2)(\sin t - \cos t) \end{aligned}.$$

8.6 Metodom pogađanja partikularnog rešenja rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + e^{2t} \\ y' &= 3x - 2y - 3z + \cos t \\ z' &= -x + y + 2z + e^t \end{aligned}$$

Rešenje: Rešavamo prvo homogen sistem i dobijamo da je

$$\begin{aligned} x_h &= c_1 + c_2 e^t + c_3 e^t \\ y_h &= 3c_1 + c_2 e^t \\ z_h &= -c_1 + c_3 e^t \end{aligned}$$

i karakteristični koreni su

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = 1.$$

Pogađačku metodu koristimo ako su svi nehomogeni delovi oblika

$$P_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t \text{ ili } P_m(t) e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

gde je $P_m(t)$ polinom reda m.

Tada je partikularno rešenje oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k^1 \\ Q_k^2 \\ Q_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t + \begin{bmatrix} R_k^1 \\ R_k^2 \\ R_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

gde su Q_k^i i R_k^i polinomi reda $k = m + l$, a l je višestrukost $\alpha + i\beta$ kao korena karakteristične jednačine.

Posmatrajmo prvo e^{2t}. Imamo da je $m = 0$, a kako je $\alpha = 2$, a $\beta = 0$, onda je i $l = 0$. Partikularno rešenje je oblika:

$$\begin{bmatrix} x_{p_1} \\ y_{p_1} \\ z_{p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Do konstanti A, B, C dolazimo uvrštavajući partikularno rešenje u sistem gde je od nehomogenih delova jedini preostao onaj koji posmatramo, tj.

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + e^{2t} \\ y' &= 3x - 2y - 3z \\ z' &= -x + y + 2z \end{aligned}$$

Tako dobijamo da je $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ i $C = -\frac{1}{2}$.

Sada posmatramo $\cos t$. Imamo da je $m = 0$, a kako je $\alpha = 0$, a $\beta = 1$, imamo da je $l = 0$. Partikularno rešenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_2} \\ y_{p_2} \\ z_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} \sin t.$$

Što se tiče e^t, imamo da je $\alpha = 1$, a $\beta = 0$, pa je $l = 2$. Stoga je partikularno rešenje oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_3} \\ y_{p_3} \\ z_{p_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x t^2 + B_x t + C_x \\ A_y t^2 + B_y t + C_y \\ A_z t^2 + B_z t + C_z \end{bmatrix} e^t$$

U oba slučaja se do konstanti dolazi uvrštavanjem u sistem koji od nehomogenih delova ima samo onaj koji posmatramo.

□

8.7 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z + t \\ y' &= x + y - z - (t^2 + 1) \sin t \\ z' &= 2z - y \end{aligned}$$

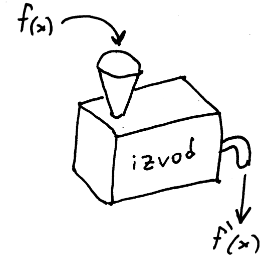
8.8 Rešiti sistem

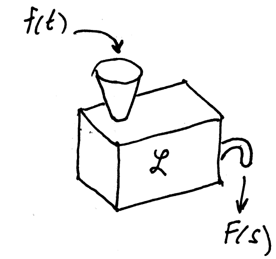
$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + \operatorname{tg} t \\ y' &= 3x - y - 2z \\ z' &= 2z - x + y + \operatorname{ctg} t \end{aligned}$$

8.9 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2z - y + t \cos t \\ y' &= x + 2z + e^t \sin t \\ z' &= y - 2x - z \end{aligned}$$

Definicija Laplasove transformacije





Neka je $f(t)$ f-ja na $[0, \infty)$. Laplasova transformacija od f je f-ja F definisana pomoću integrala

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \qquad \dots (1)$$

Domen f-je $F(s)$ su sve vrijednosti od s za koje integral (1) postoji. Laplasovu transformaciju f-je f ćemo označavati ili sa F ili sa $\mathcal{L}\{f\}$.

Linearnost Laplasove transformacije:

Ako je $\mathcal{L}\{f\} = F$ i $\mathcal{L}\{g\} = G$ tada vrijedi

$$\mathcal{L}\{a\, f(t) + b\, g(t)\}(s) = aF(s) + b\, G(s)$$

gdje su a i b konstante.

F-ja $f(t)$ se naziva orginal, a f-ja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ slika.

Odrediti Laplasovu transformaciju konstantne f-je $f(t)=1$, $t\geq 0$.

Rj.

Laplasova transformacija f-je f je f-ja F definisana pomoću integrala

$$F(s):=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt.$$

Laplasova transformacija f-je f označavamo sa F ili sa $\mathcal{L}\{f\}$.

U našem slučaju

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}dt=\left|\begin{array}{l} d(-st)=-s\,dt \\ dt=\frac{1}{-s}d(-st)\end{array}\right|$$

$$=\frac{-1}{s}\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}d(-st)=\frac{-1}{s}\lim_{N\to\infty}e^{-st}\Big|_0^N=\frac{-1}{s}\lim_{N\to\infty}\left(e^{-sN}-1\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{N\to\infty}e^{-sN}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{e^{sN}}=0 \quad \text{za } s>0 \\ \lim\limits_{N\to\infty}e^{-sN}=\infty \quad \text{za } s<0\end{array}\right|=\begin{cases}-\frac{1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}, & \text{za } s>0\\ -\frac{1}{s}\cdot\infty=\infty, & \text{za } s<0\end{cases}$$

Prema tome

$F(s)=\frac{1}{s}$ gdje je domen od F svi $s>0$

$$\mathcal{L}\{1\}(s)=\frac{1}{s},\quad s>0$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je $f(t)=e^{\alpha t}$, gdje je α konstanta.

Rj. Laplasova transformacija od f je f-ja F definisana sa

$$F(s):=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

Laplasovu transformaciju f-je f označavamo sa F ili sa $\mathcal{L}\{f\}$.

U ovom slučaju

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{\alpha t}\,dt=\int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}dt=\left|\begin{array}{l}d((\alpha-s)t)=(\alpha-s)dt\\ dt=\frac{1}{\alpha-s}d((\alpha-s)t)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\alpha-s}\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{(\alpha-s)t}d((\alpha-s)t)=\frac{1}{\alpha-s}\lim_{N\to\infty}e^{(\alpha-s)t}\Big|_0^N=$$

$$=\frac{1}{\alpha-s}\lim_{N\to\infty}\left(e^{(\alpha-s)N}-1\right)=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{N\to\infty}e^{(\alpha-s)N}=0, \text{ za } \alpha-s<0\\ \lim\limits_{n\to\infty}e^{(\alpha-s)N}=\infty, \text{ za } \alpha-s>0\end{array}\right|$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-s}(0-1)=\frac{1}{s-\alpha}, & \text{za } \alpha<s\\ \frac{1}{\alpha-s}(\infty-1)=\infty, & \text{za } \alpha>s\end{cases}$$

Prema tome

$F(s)=\frac{1}{s-\alpha}$ gdje je domen od F svi $s>\alpha$.

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s)=\frac{1}{s-\alpha},\quad s>\alpha.$$

Odrediti $\mathcal{L}\{\sin \beta t\}$ gdje je β nenula konstanta.

Rj. Laplasova transformacija od f je f-ja F definisana sa

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Laplasovu transformaciju f-je f označavamo sa F ili sa $\mathcal{L}\{f\}$.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin \beta t\,dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} \sin\beta t\,dt$$

Izračunajmo posebno integral $I = \int e^{-st} \sin\beta t\,dt$.

$$I = \left| \begin{matrix} u = \sin\beta t & dv = e^{-st}dt \\ du = \beta\cos\beta t\,dt & v = \frac{-1}{s}e^{-st} \end{matrix} \right| = \frac{-1}{s}e^{-st}\sin\beta t + \frac{\beta}{s}\int e^{-st}\cos\beta t\,dt$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \cos\beta t & dv = e^{-st}dt \\ du = \beta(-\sin\beta t) & v = \frac{-1}{s}e^{-st} \end{matrix} \right| = \frac{-1}{s}e^{-st}\sin\beta t + \frac{\beta}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos\beta t \right.$$

$$\left. - \frac{\beta}{s}\int e^{-st}\sin\beta t \right] = -\frac{1}{s}e^{-st}\sin\beta t - \frac{\beta}{s^2}e^{-st}\cos\beta t - \frac{\beta^2}{s^2}\cdot I$$

$$\Rightarrow \quad I + \frac{\beta^2}{s^2} I = e^{-st}\left(-\frac{1}{s}\sin\beta t - \frac{\beta}{s^2}\cos\beta t\right)$$

$$\frac{s^2+\beta^2}{s^2} I = e^{-st}\left(-\frac{1}{s}\sin\beta t - \frac{\beta}{s^2}\cos\beta t\right) \quad /\cdot \frac{s^2}{s^2+\beta^2}$$

$$I = \int e^{-st}\sin\beta t\,dt = \frac{e^{-st}}{s^2+\beta^2}\left(-s\sin\beta t - \beta\cos\beta t\right)$$

Prema tome

$$F(s) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{e^{-st}}{s^2+\beta^2}\left(-s\sin\beta t - \beta\cos\beta t\right)\right)\Bigg|_0^N =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{e^{-sN}}{s^2+\beta^2}\left(-s\cdot\sin\beta N - \beta\cos\beta N\right) - \frac{1}{s^2+\beta^2}\left(0 - \beta\cdot 1\right)\right]$$

$$= \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \quad \text{za} \quad s>0$$

(nije teško vidjeti da je $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{-s}{s^2+\beta^2} e^{-sN}\sin\beta N = 0$

kao i $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{-\beta}{s^2+\beta^2} e^{-sN}\cos\beta N = 0$ za $s>0$)

Prema tome

$$F(s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \quad \text{gdje je domen od } F \quad s>0$$

$$\mathcal{L}\{\sin\beta t\}(s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}, \quad s>0$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je

$$f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<5\\ 0, & 5<t<10\\ e^{4t}, & 10<t\end{cases}$$

Rj. Laplasova transformacija f-je $f(t)$ je f-ja $F(s)$ definisana sa

$$F(s):=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

Laplasovu transformaciju f-je $f(t)$ označavamo sa F ili sa $\mathcal{L}\{f\}$.

Kako je $f(t)$ definisana različitim formulama na različitim intervalima, prilikom računanja integral ćemo podijeliti na dijelove

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^5 e^{-st}\cdot 2\,dt+\int_5^{10} e^{-st}\cdot 0\,dt+\int_{10}^\infty e^{-st}e^{4t}\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l} d(-st)=-s\,dt\\ dt=-\frac{1}{s}d(-st)\end{array}\right|=2\int_0^5\frac{(-1)}{s}e^{-st}d(-st)+\lim_{N\to\infty}\int_{10}^N e^{(4-s)t}dt=$$

$$=\frac{-2}{s}e^{-st}\Big|_0^5+\lim_{N\to\infty}\frac{1}{4-s}e^{(4-s)t}\Big|_{10}^N=\frac{-2}{s}\left(e^{-5s}-1\right)+$$

$$+\frac{1}{4-s}\lim_{N\to\infty}\left(e^{(4-s)N}-e^{(4-s)\cdot 10}\right)=\left|\begin{array}{ll}\lim\limits_{N\to\infty}e^{(4-s)N}=0 & \text{za } 4-s<0\\ \lim\limits_{N\to\infty}e^{(4-s)N}=\infty & \text{za } 4-s>0\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{2}{s}e^{-5s}+\frac{(-1)}{4-s}e^{10(4-s)},\quad \text{za } s>4$$

LINEARNOST LAPLASOVE TRANSFORMACIJE

Neka su f, f_1 i f_2 f-je za koje postoji Laplasova transformacija za $s>\alpha$ i neka je c konstanta. Pokazati da za $s>\alpha$ vrijedi

$$\mathcal{L}\{f_1+f_2\}=\mathcal{L}\{f_1\}+\mathcal{L}\{f_2\}$$

$$\mathcal{L}\{cf\}=c\,\mathcal{L}\{f\}.$$

Rj. Prema definiciji $\quad F(s)=\mathcal{L}\{f\}(s):=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$

U ovom slučaju

$$\mathcal{L}\{f_1+f_2\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\left(f_1(t)+f_2(t)\right)dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt+\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)\,dt$$

$$=\mathcal{L}\{f_1\}(s)+\mathcal{L}\{f_2\}(s)$$ što je i trebalo dobiti.

Slično

$$\mathcal{L}\{cf\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\left(cf(t)\right)dt=c\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=c\,\mathcal{L}\{f\}(s).$$

Odrediti $\mathcal{L}\{11+5e^{4t}-6\sin 2t\}$.

Rj. U rješenju zadatka ćemo iskoristiti linearnost Laplasove transformacije

$$\mathcal{L}\{11+5e^{4t}-6\sin 2t\} = \mathcal{L}\{11\}+\mathcal{L}\{5e^{4t}\}+\mathcal{L}\{-6\sin 2t\}$$
$$= 11\mathcal{L}\{1\}+5\mathcal{L}\{e^{4t}\}-6\mathcal{L}\{\sin 2t\}.$$

U prva tri zadatka smo pokazali da je

$$\underset{s>0}{\mathcal{L}\{1\}(s)=\frac{1}{s}}, \quad \underset{s>\alpha}{\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s)=\frac{1}{s-\alpha}}, \quad \underset{s>0}{\mathcal{L}\{\sin at\}(s)=\frac{a}{s^2+a^2}}$$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{11+5e^{4t}-6\sin 2t\}(s) = 11\cdot\frac{1}{s}+5\cdot\frac{1}{s-4}-6\cdot\frac{2}{s^2+2^2}$$
$$= \frac{11}{s}+\frac{5}{s-4}-\frac{12}{s^2+4}$$

Kako su svi $\mathcal{L}\{1\}$, $\mathcal{L}\{e^{4t}\}$, $\mathcal{L}\{\sin 2t\}$ definisani za $s>4$, to je i transformacija definisana za $s>4$.

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je $f(t)=\operatorname{ch}\alpha t$ gdje je $\alpha>0$ konstanta.

Rj. U ovom zadatku ćemo iskoristiti linearnost Laplasove transformacije

$$\mathcal{L}\{c_1f_1+c_2f_2\} = c_1\mathcal{L}\{f_1\}+c_2\mathcal{L}\{f_2\}$$

c_1, c_2 su konstante

$$\operatorname{ch}\alpha t = \frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} = \frac{1}{2}(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{ch}\alpha t\}(s) = \mathcal{L}\{\tfrac{1}{2}(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s) +$$
$$+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}(s) \overset{(*)}{=}$$

U jednom od prethodnih zadataka smo izračunali da je

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s) = \frac{1}{s-\alpha}, \quad s>\alpha$$

Prema tome

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{s+\alpha}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s+\alpha+s-\alpha}{s^2-\alpha^2} = \frac{s}{s^2-\alpha^2} \quad \text{za } s>\alpha$$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{\operatorname{ch}\alpha t\}(s) = \frac{s}{s^2-\alpha^2} \quad \text{za } s>\alpha>0$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je $f(t)=(t+3)^2$.

Rj. Koristit ćemo osobinu linearnosti Laplasove transformacije i elementarnu tabelu Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}\{(t+3)^2\}(s) = \mathcal{L}\{t^2+6t+9\}(s) =$$

$$= \mathcal{L}\{t^2\}(s)+6\mathcal{L}\{t\}(s)+9\mathcal{L}\{1\}(s) =$$

$$= \frac{2}{s^3}+6\cdot\frac{1}{s^2}+9\cdot\frac{1}{s}$$

$$= \frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je $f(t)=\operatorname{sh}\beta t$ gdje je $\beta>0$ konstanta.

Rj. U zadatku ćemo iskoristiti osobinu linearnosti Laplasove transformacije

$$\mathcal{L}\{c_1f_1+c_2f_2\} = c_1\mathcal{L}\{f_1\}+c_2\mathcal{L}\{f_2\}$$

c_1, c_2 su konstante

$$\operatorname{sh}\beta t = \frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2} = \frac{1}{2}(e^{\beta t}-e^{-\beta t})$$

U jednom od prethodnih zadataka smo izračunali da je

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s) = \frac{1}{s-\alpha}, \quad s>\alpha$$

Sad imamo

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sh}\beta t\}(s) = \mathcal{L}\{\tfrac{1}{2}(e^{\beta t}-e^{-\beta t})\}(s) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{\beta t}\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-\beta t}\}(s) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-\beta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+\beta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+\beta-(s-\beta)}{(s-\beta)(s+\beta)} = \frac{\beta}{s^2-\beta^2}$$

za $s>\beta$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sh}\beta t\}(s) = \frac{\beta}{s^2-\beta^2} \quad \text{za } s>\beta>0$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je $f(t)=\cos\alpha t$ gdje je $\alpha>0$ konstanta.

Rj.

U zadatku ćemo iskoristiti osobinu linearnosti Laplasove transformacije

$$\mathcal{L}\{\alpha f+\beta g\}=\alpha\mathcal{L}\{f\}+\beta\mathcal{L}\{g\}$$

α,β su konstante

Prisjetimo se

$$\begin{aligned} e^{i\alpha x}&=\cos\alpha x+i\sin\alpha x\\ + \quad e^{-i\alpha x}&=\cos\alpha x-i\sin\alpha x\\ \hline e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}&=2\cos\alpha x \end{aligned}$$

$$\cos\alpha x=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}\right).$$

U jednom od prethodnih zadataka smo pokazali da je

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s)=\frac{1}{s-\alpha},\quad s>\alpha$$

pa je $\mathcal{L}\{e^{(i\alpha)x}\}(s)=\dfrac{1}{s-i\alpha}$ iz čega slijedi da

$$\mathcal{L}\{\cos\alpha t\}(s)=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}\right)\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{i\alpha x}\}(s)+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-i\alpha x}\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-i\alpha}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+i\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s+i\alpha+s-i\alpha}{(s-i\alpha)(s+i\alpha)}=\frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{\cos\alpha t\}(s)=\frac{s}{s^2+\alpha^2}\quad \text{za } \alpha>0$$

Odrediti Laplace-ovu transformaciju f-je $f(t)=\sin 2t\cdot\cos 5t$.

Rj.

$$\begin{aligned} \sin(A+B)&=\sin A\cos B+\sin B\cos A\\ + \quad \sin(A-B)&=\sin A\cos B-\sin B\cos A\\ \hline \sin(A+B)+\sin(A-B)&=2\sin A\cos B \end{aligned}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\left(\sin(A+B)+\sin(A-B)\right)$$

Prema tome

$$\sin 2t\cos 5t=\frac{1}{2}\left(\sin 7t+\sin(-3t)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 7t-\frac{1}{2}\sin 3t.$$

Znamo da je $\mathcal{L}\{\sin at\}(s)=\dfrac{a}{s^2+a^2},\quad s>0$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\cdot\cos 5t\}(s)=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin 7t\}(s)-\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{s^2+7^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}$$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\cdot\cos 5t\}(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{s^2+49}-\frac{3}{s^2+9}\right).$$

Neka je $F(s)=\mathcal{L}\{f\}(s)$. Odrediti $\mathcal{L}\{f(at)\}(s)$, gdje je $a>0$.

Rj.
$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(at)\,dt=\left|\begin{array}{ll} at=u & t=\frac{u}{a} \\ a\,dt=du & \\ dt=\frac{1}{a}\,du & t\big|_0^\infty \Rightarrow u\big|_0^\infty \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u}f(u)\,du=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Ako je $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ i $b>0$ odrediti $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right)\right\}(s)$.

Rj.
$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right)\right\}(s)=\frac{1}{b}\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{b}\right)\right\}(s)=\frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-st}f\left(\frac{t}{b}\right)dt=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} \frac{t}{b}=u & t\big|_0^\infty \Rightarrow u\big|_0^\infty \\ \frac{1}{b}\,dt=du & t=bu \\ dt=b\,du & \end{array}\right|=\int_0^\infty e^{-(bs)u}f(u)\,du=F(bs)$$

Prema tome

$$F(bs)=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right)\right\}(s)$$

Ako je $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ odrediti $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s)$.

Rj.
$$\mathcal{L}\{\underbrace{e^{-at}f(t)}_{g(t)}\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\underbrace{e^{-at}f(t)}_{g(t)}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)\,dt=F(s+a).$$

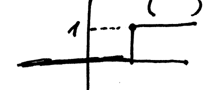
Prema tome $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s)=F(s+a)$

Ako je $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=F(s)$, $a>0$ i $u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ odrediti $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s)$.

Rj.
$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)\,dt=$$

$$=\left|\; u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases} \Rightarrow u(t-a)=\begin{cases}1, & t-a\geq 0\\ 0, & t-a<0\end{cases}\;\right|=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt=$$


1


1

$$=\left|\begin{array}{ll} u=t-a & e^{-st}=e^{-s(u+a)}=e^{-sa}e^{-su} \\ du=dt & \\ t=u+a & t\big|_a^\infty \Rightarrow u\big|_0^\infty \end{array}\right|=e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du=e^{-as}F(s)$$

Zadaci za vježbu

1. Koristeći direktno definiciju transformata, odrediti Laplasovu transformaciju sljedećih f-ja

(a) t (b) t^2 (c) e^{6t} (d) te^{3t}

(e) $\cos 2t$ (f) $\cos bt$, b-konstanta (g) $e^{2t}\cos 3t$

(h) $e^{-t}\sin 2t$ (i) $f(t)=\begin{cases} 0, & 0<t<2 \\ t, & 2<t \end{cases}$

(j) $f(t)=\begin{cases} 1-t, & 0<t<1 \\ 0, & 1<t \end{cases}$ (k) $f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0<t<\pi \\ 0, & \pi<t \end{cases}$

(l) $f(t)=\begin{cases} e^{2t}, & 0<t<3 \\ 1, & 3<t \end{cases}$

2. Koristeći linearnost Laplasove transformacije i tablicu elementarnih transformata, odrediti slike sljedećih f-ja

(a) t^3-3t^2+2 (b) $(t+1)^3$ (c) $3e^t \operatorname{sh} 2t$

(d) $\operatorname{ch} 2t\cdot \operatorname{sh} t$ (e) $\cos^2(2t)$ (f) $\sin t\cdot\sin 2t$

(g) $\cos 5t\cdot\sin 3t$ (h) $\cos^3 t$

Odabrana rješenja:

1. (a) $\frac{1}{s^2}$ (c) $\frac{1}{s-6}$, $s>6$ (e) $\frac{s}{s^2+4}$, $s>0$ (g) $\frac{s-2}{(s-2)^2+9}$, $s>2$

(i) $e^{-2s}\left(\frac{2s+1}{s^2}\right)$, $s>0$ (k) $\frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$, $\forall s$

2. (f) $\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+9}\right)$

2. (g) $\frac{4}{s^2+64}-\frac{3}{s^2+36}$

Kraća tabela Laplasovih transformacija

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}\{f\}(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s>0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$, $s>\alpha$
t^n, $n=1,2,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$, $s>0$
$\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$, $s>0$
$e^{\alpha t}t^n$, $n=1,2,\ldots$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$, $s>\alpha$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$, $s>\alpha$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$, $s>\alpha$
t	$\frac{1}{s^2}$, $s>0$
$\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$, $s>\lvert\alpha\rvert$
$\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$, $s>\lvert\alpha\rvert$

Osobine Laplasove transformacije

1. Translacija po s

Ako Laplasova transformacija $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ postoji za $s > \alpha$ tada
$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$$
za $s > \alpha + a$.

2. Laplasova transformacija izvoda

Neka je $f(t)$ neprekidna na $[0,\infty)$, i neka je $f'(t)$ po dijelovima neprekidna na $[0,\infty)$, gdje su obe f-je eksponencijalne reda α. Tada, za $s > \alpha$
$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$$

3. Laplasova transformacija izvoda višeg reda

Neka su $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ neprekidne f-je na $[0,\infty)$ i neka je $f^{(n)}(t)$ po dijelovima neprekidna na $[0,\infty)$ gdje su sve ove f-je eksponencijalne reda α. Tada, za $s > \alpha$
$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

4. Izvod Laplasove transformacije

Neka je $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ i pretpostavimo da je $f(t)$ po dijelovima neprekidna na $[0,\infty)$ i eksponencijalna reda α. Tada za $s > \alpha$
$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s).$$

5. Integrisanje slike

Neka je $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$. Tada $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(x)\,dx$.

6. Integrisanje orginala

Ako je $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ tada $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$

Prema tome osnovne osobine Laplasove transformacije su

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}.$$

$$\mathcal{L}\{cf\} = c\mathcal{L}\{f\} \quad \text{za bilo koju konstantu } c$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}\{f\}(s)\right).$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(x)\,dx$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je $e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Rj. U rješenju zadatka ćemo iskoristiti osobinu translacije po s

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s)=F(s-a)$$

Od ranije znamo $\mathcal{L}\{\sin\beta t\}(s)=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$

tj. $F(s)=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$

Sad ako iskoristimo osobinu translacije

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\}(s)=F(s-\alpha)=\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Izračunati $\mathcal{L}\{t^n e^{2t}\}(s)$.

Rj. Znamo da ako je $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=F(s)$ tada

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s)=F(s-a)$$

S obzirom da je

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s)=\frac{n!}{s^{n+1}},\quad s>0$$

(elementarna tabela Laplasovih transformacija)

to je $$\mathcal{L}\{e^{2t}t^n\}=\frac{n!}{(s-2)^{n+1}}.$$

Koristeći Laplasovu transformaciju izvoda $\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$ odrediti $\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s)$.

Rj.

Neka je $\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = F(s)$.

$$(\sin\omega t)' = \omega\cos\omega t$$

$$\mathcal{L}\{(\sin\omega t)'\}(s) = s\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) - \sin\omega 0 = sF(s)$$

$$\parallel$$

$$\mathcal{L}\{\omega\cos\omega t\}(s) = \omega\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s)$$

tj. $$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{\omega}F(s)$$

$$(\cos\omega t)' = -\omega\sin\omega t$$

$$\mathcal{L}\{(\cos\omega t)'\}(s) = s\cdot\frac{s}{\omega}F(s) - \cos\omega 0 = \frac{s^2}{\omega}F(s) - 1$$

$$\parallel$$

$$\mathcal{L}\{-\omega\sin\omega t\}(s) = -\omega\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = -\omega F(s)$$

tj. $$-\omega F(s) = \frac{s^2}{\omega}F(s) - 1$$

$$\frac{s^2}{\omega}F(s) + \omega F(s) = 1$$

$$\frac{s^2+\omega^2}{\omega}F(s) = 1 \Rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

tj. $$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Koristeći Laplasovu transformaciju izvoda $\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$ odrediti $\mathcal{L}\{\sin t\}(s)$.

Rj.

Neka je $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = F(s)$.

$$(\sin t)' = \cos t$$

$$\mathcal{L}\{(\sin t)'\}(s) = s\mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \sin(0)$$
$$= sF(s)$$

tj. $$\mathcal{L}\{\cos t\} = sF(s)$$

$$(\cos t)' = -\sin t$$

$$\mathcal{L}\{(\cos t)'\}(s) = s\mathcal{L}\{\cos t\}(s) - \cos 0$$
$$= s^2F(s) - 1$$

tj. $$\mathcal{L}\{-\sin t\} = s^2F(s) - 1$$

Kako je $\mathcal{L}\{-\sin t\} = -\mathcal{L}\{\sin t\} = -F(s)$

to je $$-F(s) = s^2F(s) - 1$$

$$(s^2+1)F(s) = 1 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

tj. $$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Koristeći osobine Laplasove transformacije i činjenicu da je $\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = \frac{b}{s^2+b^2}$ odrediti $\mathcal{L}\{\cos bt\}$.

Rj: U rješenju ćemo iskoristiti osobinu Laplasove transformacije izvoda

$$\underline{\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)}$$

Neka je $f(t) := \sin bt$. Tada $f(0) = 0$

$$f'(t) = b\cos bt$$

Uvrstimo ovo u napisanu formulu

$$\mathcal{L}\{b\cos bt\}(s) = s\,\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) - 0$$

$$b\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) = \frac{sb}{s^2+b^2} \qquad /:b$$

$$\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) = \frac{s}{s^2+b^2}$$

Pokazati da za svaku neprekidnu f-ju $f(t)$ vrijedi sljedeća jednakost

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(predpostavljajući da transformacija postoji).

Rj: Definišimo f-ju $g(t)$ na sljedeći način $g(t) := \int_0^t f(x)\,dx$.

Primjetimo da je $g(0) = 0$ i $g'(t) = f(t)$.

Sad iskoristimo osobinu Laplasove transformacije izvoda

$$\underline{\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)}$$

(umjesto $f(t)$ mi imamo $g(t)$)

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = s\,\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}(s) - 0$$

iz čega slijedi

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s).$$

Laplasova transformacija f-je $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

(koja se naziva step f-ja ili jedinična f-ja) je $\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \frac{1}{s}$ gdje $s > 0$. Koristeći ovu činjenicu i osobinu izvoda Laplasove transformacije $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s)$ odrediti $\mathcal{L}\{t^n\}$.

Rj.

$$\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \frac{1}{s} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{-t\,u(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{t\,u(t)\} = -(-1)^1 \frac{dF}{ds}(s)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)\, s^{-2} = \frac{-1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{-t\}(s) = \frac{-1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{(-t)^2 u(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t^2 u(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s) = \frac{2}{s^3}$$

$(-1)(-2)$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{(-t)^n u(t)\}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n u(t)\}(s) = (-1)^n (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$= \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{s^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}$$

tj. $(-1)^n \mathcal{L}\{t^n\}(s) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Odrediti $\mathcal{L}\{t \sin bt\}$.

Rj. Iz tablice elementarnih transformacija znamo da je

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

Sad ako iskoristimo osobinu izvoda Laplasove transform.

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s) \quad \dots (*)$$

diferencirajući $F(s)$ dobićemo

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{0 - b \cdot 2s}{(s^2 + b^2)} = \frac{-2bs}{(s^2 + b^2)}$$

Koristeći $(*)$ imamo

$$\mathcal{L}\{t \sin bt\}(s) = -\frac{dF}{ds}(s) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}.$$

Odrediti $\mathcal{L}\{te^t\cos t\}$.

Rj. Iz tablice elementarnih transformacija

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{gdje} \quad s>0.$$

Osobina translacije po s kaže da za $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$$

U našem slučaju

$$\mathcal{L}\{e^t\cos t\}(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} = \frac{s-1}{s^2-2s+2}$$

Za $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ osobina izvoda Laplasove transformacije je

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

pa imamo

$$\mathcal{L}\{te^t\cos t\}(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{s-1}{s^2-2s+2}\right)$$

$$= (-1)\frac{1\cdot(s^2-2s+2) - \overbrace{(s-1)(2s-2)}^{2s^2-4s+2}}{(s^2-2s+2)^2} = (-1)\frac{-s^2+2s}{(s^2-2s+2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{te^t\cos t\}(s) = \frac{s^2-2s}{(s^2-2s+2)^2}$$

Odrediti sliku f-je $tf''(t)$ (drugim riječima odrediti $\mathcal{L}\{tf''(t)\}$.

Rj. Znamo da (Laplasova transformacija izvoda)

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$$

Ako označimo $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Isto tako znamo (izvod Laplasove transformacije)

$$\mathcal{L}\{t f(t)\}(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds}F(s)$$

Pa je

$$\mathcal{L}\{tf''(t)\} = (-1)\left[2sF(s) + s^2F'(s) - f(0)\right]$$

$$= -s^2F'(s) - 2sF(s) + f(0)$$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{tf''(t)\}(s) = -s^2F'(s) - 2sF(s) + f(0)$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je $\dfrac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}$.

Rj. Prema tablici elementarnih transformacija imamo

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)=\frac{1}{s+3} \quad i \quad \mathcal{L}\{e^{-5t}\}(s)=\frac{1}{s+5}$$

pa vrijedi

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}-e^{-5t}\}(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+5}$$

Ako sad primjenimo osobinu integrivanja Laplasove transform.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s)=\int_s^\infty F(x)\,dx$$

imamo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}\right\}(s)=\int_s^\infty\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)dx$$

$$=\left(\ln(x+3)-\ln(x+5)\right)\Big|_s^\infty=\ln\frac{x+3}{x+5}\Big|_s^\infty=$$

$$=\ln 1-\ln\frac{s+3}{s+5}=\ln\frac{s+5}{s+3}.$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}\right\}(s)=\ln\frac{s+5}{s+3}$$

Koristeći Laplaceovu transformaciju, izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}\,dt.$$

Rj. Prema osobinama Laplaceove transformacije (integrivanje slike) znamo da

$$F(s)=\mathcal{L}\{f\}(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s)=\int_s^\infty F(x)\,dx \quad \dots(*)$$

Prema definiciji Laplaceove transformacije

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,\frac{\sin^2 t}{t}\,dt=F(s)$$

Prema tome dati integral je jednak $F(1)$ gdje je $F(s)$ slika f-je $\frac{\sin^2 t}{t}$ tj. $F(s)=\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\}(s)$.

$$\mathcal{L}\{\sin^2 t\}(s)=\mathcal{L}\left\{\tfrac{1}{2}(1-\cos 2t)\right\}(s)=\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{1-\cos 2t\}(s)=$$

$$=\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{1\}-\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2t\}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\}(s)\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}\int_s^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx=\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\ln x}_{\frac{1}{2}\ln x^2}-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big]\Big|_s^\infty$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+4}\Big|_s^\infty=-\frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2+4}=F(s)$$

Prema tome $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}\,dt=F(1)=\frac{1}{4}\ln 5$

(#) Izračunati integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{2}t}\frac{\operatorname{sh}t\sin t}{t}\,dt$

Rj: Prema definiciji Laplaceove transformacije

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sh}t\sin t}{t}\right\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\frac{\operatorname{sh}t\sin t}{t}\,dt=F(s)$$

Prema tome dati integral je jednak vrijednosti $F(\sqrt{2})$.

Prema tabeli elementarnih transformacija

$$\mathcal{L}\{\sin\beta t\}(s)=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\ , \quad s>0$$

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\}(s)=\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\ , \quad s>\alpha$$

pa je

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sh}t\sin t\}(s)=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{(e^t-e^{-t})\sin t\}(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

Prema osobini integriranje slike

$$F(s)=\mathcal{L}\{f\}(s)\ \Rightarrow\ \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s)=\int_s^\infty F(x)\,dx$$

imamo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sh}t\sin t}{t}\right\}(s)=\frac{1}{2}\int_s^\infty\left[\frac{1}{(x-1)^2+1}-\frac{1}{(x+1)^2+1}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(x-1)\Big|_s^\infty-\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_s^\infty\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(s-1)-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(s+1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(s+1)-\operatorname{arctg}(s-1)\right)=F(s)$$

Prema tome traženi integral je jednak

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{2}t}\frac{\operatorname{sh}t\sin t}{t}\,dt=F(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)\right)$$

Vrijednost datog integrala se može dovesti na prikladniji oblik korištenjem formule

$$\boxed{\operatorname{arctg}a-\operatorname{arctg}b=\operatorname{arctg}\frac{a-b}{1+ab}}$$

Odavde

$$F(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\underbrace{\frac{2}{2}}_{=1}=\frac{\pi}{8}.$$

\# Odrediti Laplasovu transformaciju f-je

$$\varphi(t)=\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du$$

Rj.

$$\mathcal{L}\{\sin u\}(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

Iz osobine Laplasove transformacije (integriranje slike)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s)=\int_s^{\infty}F(x)\,dx$$

imam

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s)=\int_s^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}s$$

Prema osobini integriranja orginala

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}(s)=\frac{F(s)}{s}$$

imamo

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\}(s)=\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}s}{s}$$

\# Odrediti Laplasovu transformaciju f-je

$$\varphi(t)=\int_0^t\left(e^{-3x}\operatorname{ch}2x+e^{4x}\sin 2x\right)dx$$

Rj. Iz tabele elementarnih Laplasovih transformacija znamo

$$\mathcal{L}\{\operatorname{ch}ax\}(s)=\frac{s}{s^2-a^2},\quad s>|a| \quad i \quad \mathcal{L}\{\sin ax\}(s)=\frac{a}{s^2+a^2},\quad s>0$$

pa je

$$\mathcal{L}\{\operatorname{ch}2x\}(s)=\frac{s}{s^2-4} \quad i \quad \mathcal{L}\{\sin 2x\}(s)=\frac{2}{s^2+4}$$

Iz osobine translacije po s

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s)=F(s-a)$$

pa je

$$\mathcal{L}\{e^{-3x}\operatorname{ch}2x\}(s)=\frac{s+3}{(s+3)^2-4}=\frac{s+3}{s^2+6s+5}$$

$$\mathcal{L}\{e^{4x}\sin 2x\}(s)=\frac{2}{(s-4)^2+4}=\frac{2}{s^2-8s+20}$$

Na kraju, prema osobini integriranju orginala

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}(s)=\frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t\left(e^{-3x}\operatorname{ch}2x+e^{4x}\sin 2x\right)dx\right\}(s)=\frac{\frac{s+3}{s^2+6s+5}+\frac{2}{s^2-8s+20}}{s}$$

$$=\frac{s+3}{s^3+6s^2+5s}+\frac{2}{s^3-8s^2+20s}$$

Zadaci za vježbu

1° Odrediti

(a) $\mathcal{L}\{\operatorname{sh}2t\cdot\cos 2t\}(s)$ (b) $\mathcal{L}\{\operatorname{ch}2t\cdot\cos 2t\}(s)$

(c) $\mathcal{L}\{\operatorname{sh}^3(2t)\}(s)$

(d) $\mathcal{L}\{(t+1)\sin 2t\}(s)$ (e) $\mathcal{L}\{(t+1)^3 e^{-2t}\}(s)$

2° Odrediti

(a) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos 2t-\cos 3t}{t}\right\}(s)$; (b) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{sh}t}{t}\right\}(s)$;

(c) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin 3t}{t}\right\}(s)$; (d) $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \dfrac{\operatorname{sh}^2 u}{u}\,du\right\}(s)$

3° Primjenom Laplaceove transformacije izračunati integral

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2t}\,t\cos t\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3t}\,t\sin t\,dt$; (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$; (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-4t}}{t}\,dt$

Odgovori

1° (a) $\dfrac{2s^2-16}{s^4+64}$ (b) $\dfrac{s^3}{s^4+64}$ (c) $\dfrac{48}{(s^2-36)(s^2-4)}$

2° (a) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s^2+9}{s^2+4}$ (b) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s+1}{s-1}$

(c) $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{s}{3}$ (d) $\dfrac{1}{4s}\ln\left(\dfrac{s^2}{s^2-4}\right)$

3° (a) $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}a$ (b) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{a}$

(c) $\dfrac{3}{25}$ (d) $\dfrac{3}{50}$ (e) $\dfrac{\pi}{2}$

4° Odrediti Laplasove transformacije sljedećih f-ja

(a) $f(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-2u}\sin 3u\,du$ (b) $\displaystyle\int_0^t u\sin u\,du$

(c) $\varphi(t)=\displaystyle\int_0^t u^2 e^u\,du$ (d) $\psi(t)=\displaystyle\int_0^t (u^3+1)e^{-u}\,du$

U PHOTOSHOPU 4.-ti zadatak UBACI PRIJE ODGOV.

Inverzna Laplasova transformacija

Za datu f-ju $F(s)$, ako postoji f-ja $f(t)$ koja je neprekidna na $[0,\infty)$ i koja ima osobinu

$$\mathcal{L}\{f\} = F$$

tada kažemo da je $f(t)$ inverzna Laplasova transformacija f-je $F(s)$ i koristimo oznaku $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Inverzna Laplasova transformacija zadovoljava osobinu linearnosti:
Pretpostavimo da postoje f-je $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$, $\mathcal{L}^{-1}\{F_1\}$ i $\mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$ koje su neprekidne na $[0,\infty)$ i neka je c neka konstanta. Tada

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1+F_2\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{cF\} = c\,\mathcal{L}^{-1}\{F\}$$

Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ ako je

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s^3}$ (b) $F(s) = \dfrac{3}{s^2+9}$ (c) $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2-2s+5}$

Rj.

(a) Iz tabele Laplasovih transformacija primjetimo da imamo

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\}(t) = t^2 \quad \left(\text{zato što } \mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2!}{s^3}\right)$$

(b) Iz tabele Laplasovih transformacija primjetimo da

$$\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}(t) = \sin 3t$$

(c) Iz tabele Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^n\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\}(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t) = e^t\cos 2t$$

$(s-1)^2 = s^2-2s+1$

\# Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10} \right\}$.

Rj. U rješenju ćemo iskoristiti osobinu linearnosti

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10} \right\} =$$

$$= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s-6} \right\} - 6\,\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+9} \right\} + \frac{3}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+4s+5} \right\}$$

Prema elementarnoj tablici Laplasovih transformacija imamo da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s-6} \right\}(t) = e^{6t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+3^2} \right\}(t) = \cos 3t$$

Kako je

$$s^2+4s+5 = s^2+2\cdot s\cdot 2 + 2^2 + 1 = (s+2)^2+1 \quad \text{to je}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+4s+5} \right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+2)^2+1^2} \right\}(t) = e^{-2t}\sin t$$

Prema tome

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10} \right\}(t) = 5e^{6t} - 6\cos 3t + \frac{3}{2}e^{-2t}\sin t$$

\# Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{5}{(s+2)^4} \right\}$.

Rj. Izraz $(s+2)^4$ u nazivniku nam sugeriva da vjerovatno trebamo iskoristiti formulu

$$\mathcal{L}\left\{ e^{at}t^n \right\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

iz elementarne tablice transformacija tj.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \right\}(t) = e^{at}t^n$$

U ovom slučaju mi imamo $a=-2$ i $n=3$ pa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{6}{(s+2)^4} \right\}(t) = e^{-2t}t^3.$$

Ako iskoristimo osobinu linearnosti imamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{5}{(s+2)^4} \right\}(t) = \frac{5}{6}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{3!}{(s+2)^4} \right\}(t) = \frac{5}{6}e^{-2t}t^3.$$

(#) Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}$.

Rj.

$$s^2+2s+10 = s^2+2\cdot s\cdot 1+1-1+10=(s+1)^2+3^2$$

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10} = \frac{3s+2}{(s+1)^2+3^2}$$

Iz tablice elementarnih Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at}\cos bt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at}\sin bt$$

U našem slučaju $a=-1$, $b=3$.

Sljedeći korak je da odredimo konstante A i B iz izraza

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10} = A\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + B\frac{3}{(s+1)^2+3^2} \quad /\cdot(s^2+2s+10)$$

$$3s+2 = A(s+1)+3B \quad \Rightarrow \begin{array}{l} s^0:\ A=3 \\ s^1:\ \underline{A+3B=2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=3 \\ B=-\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t)$$

$$= 3e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$$

<u>Primjedba</u> Posmatrajmo sljedeće dvije f-je

$$F_1(s) = \frac{7s^2+10s-1}{s^3+3s^2-s-3};$$

$$F_2(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+3}.$$

Ako nas neko prisili da nađemo inverznu Laplasovu transformaciju jedne od ove dvije f-je, koju biste izabrali? Bez sumnje $F_2(s)$ je lakša. U stvari, ove dvije f-je $F_1(s)$ i $F_2(s)$ su identički jednake. Ovo se može provjeriti tako što ćemo sabrati razlomke u f-ji $F_2(s)$. Prema tome, ako se suočimo sa problemom računanja $\mathcal{L}^{-1}$ racionalne f-je kao što je $F_1(s)$, prvo ćemo je izraziti kao sumu jednostavnih racionalnih f-ja (kao što je $F_2(s)$). Ovo se postiže <u>metodom parcijalnih razlomaka.</u>

Ukratko ćemo se podsjetiti ove metode. Od ranije znamo da se racionalna f-ja $\frac{P(s)}{Q(s)}$, gdje su $P(s)$ i $Q(s)$ polinomi u kojima je stepen od P manji od stepena od Q, može razložiti kao suma izraza parcijalnih razlomaka u kojima je nazivnik linearni ili kvadratni faktor polinoma $Q(s)$ (pretpostavljamo da su koeficijenti polinoma realni brojevi). Postoje tri slučaja koja treba razmotriti:

1° Neponavljajući linearni faktori
2° Ponavljajući linearni faktori
3° Kvadratni faktori

NEPONAVLJAJUĆI LINEARNI FAKTORI

Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ gdje je $F(s) = \dfrac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$.

Rj.

$$\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3} \qquad /(s+1)(s+2)(s-3)$$

$$7s-1 = A(s+2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s+2) \qquad \ldots(1)$$

$$7s-1 = A(s^2-s-6) + B(s^2-2s-3) + C(s^2+3s+2)$$

$$7s-1 = (A+B+C)s^2 + (-A-2B+3C)s + (-6A-3B+2C)$$

Ako izjednačimo koeficijente koji se nalaze uz s^2, s i 1 dobićemo

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A-2B+3C &= 7 \\ -6A-3B+2C &= -1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 7 \\ -6 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v \cdot 6}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v \cdot 3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \underset{\ldots}{\text{ZA VJEŽBU}} \Rightarrow A=2,\ B=-3,\ C=1$

II način – da odredimo koeficijente A, B i C je da u jednačinu (1) uvrstimo redom $s=-1, -2$ ili 3 iz čega bi dobili da je $A=2$, $B=-3$, $C=1$.

Na kraju

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s-3}\right\}(t) =$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t) - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}(t) = 2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{3t}.$$

PONAVLJAJUĆI LINEARNI FAKTORI

Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$.

Rj.

$$\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3} \qquad /(s-1)^2(s+3)$$

$$s^2+9s+2 = A(s-1)(s+3) + B(s+3) + C(s-1)^2 \qquad \ldots(1)$$

$$s^2+9s+2 = A(s^2+2s-3) + B(s+3) + C(s^2-2s+1)$$

I način

Izjednačimo koeficijente koji stoje uz s^2, s i 1.

$$\begin{aligned} A \quad +C &= 1 \\ 2A+B-2C &= 9 \\ -3A+3B+C &= 2 \end{aligned}$$

rješenjem sistema dobijamo $A=2$, $B=3$, $C=-1$

II način

Uvrstimo u (1) za s vrijednost $+1$. Dobijamo

$$12 = 4B \Rightarrow B=3$$

Ako u (1) uvrstimo $s=-3$ $\quad \overbrace{9-27+2}^{-16} = 16C$

$$C=-1$$

Da bi odredili A za s možemo izabrati proizvoljnu vrijednost npr. $s=0$, Ako uvrstimo $s=0$, $B=3$ i $C=-1$ u (1) dobijamo $A=2$

Na kraju

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} - \frac{1}{s+3}\right\}(t) =$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t) + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t) = 2e^{t} + 3te^{t} - e^{-3t}.$$

KVADRATNI FAKTORI

Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}$.

Rj. $s^2-2s+5=0$

$D=4-20<0$ $\Rightarrow$ Vidimo da je kvadratni faktor $s^2-2s+5=0$ nesvodljiv što znači da ga moramo napisati u obliku $(s-\alpha)^2+\beta^2$.

$$s^2-2s+5=s^2-2\cdot s\cdot 1+1^2-1^2+5=(s-1)^2+2^2$$

$$\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}=\frac{A(s-1)+2B}{(s-1)^2+4}+\frac{C}{s+1} \quad /(s^2-2s+5)(s+1)$$

$$2s^2+10s=\left(A(s-1)+2B\right)(s+1)+C(s^2-2s+5). \quad \ldots(1)$$

I način

U (1) uvrstimo redom $s=-1$, 1 i 0. Za $s=-1$ imamo

$$2-10=(-2A+2B)\underbrace{(-1+1)}_{=0}+C\cdot 8 \Rightarrow 8C=-8$$
$$C=-1$$

Za $s=1$ imamo $2+10=(A\cdot 0+2B)\cdot 2+C\cdot 4 \Rightarrow$ kako je $C=-1$

$\Rightarrow 12=4B-4 \Rightarrow B=4$

Za $s=0$, $C=-1$ i $B=4$ u (1) imamo $0=(-A+2B)\cdot 1+5\cdot C$

$A=3$

II način

Izjednačimo koeficijente koji stoje uz s^2, s i 1... ZA VJEŽBU

Na kraju:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+2\cdot 4}{(s-1)^2+2^2}-\frac{1}{s+1}\right\}(t)=$$

$$=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t)+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t)-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t)=3e^t\cos 2t+4e^t\sin 2t-e^{-t}.$$

Zadaci za vježbu

1. Odrediti inverznu Laplace-ovu transformaciju date f-je

(a) $\dfrac{6}{(s-1)^4}$ (b) $\dfrac{s+1}{s^2+2s+10}$ (c) $\dfrac{1}{s^2+4s+8}$

(d) $\dfrac{2s+16}{s^2+4s+13}$ (e) $\dfrac{3s-15}{2s^2-4s+10}$

2. Datu racionalnu f-ju rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka

(a) $\dfrac{s^2-26s-47}{(s-1)(s+2)(s+5}$ (b) $\dfrac{-2s^2-3s-2}{s(s+1)^2}$ (c) $\dfrac{8s-2s^2-14}{(s+1)(s^2-2s+5)}$

(d) $\dfrac{3s+5}{s(s^2+s-6)}$ (e) $\dfrac{1}{(s-3)(s^2+2s+2)}$

3. Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$

(a) $F(s)=\dfrac{6s^2-13s+2}{s(s-1)(s-6)}$ (b) $F(s)=\dfrac{5s^2+34s+53}{(s+3)^2(s+1)}$

(c) $F(s)=\dfrac{7s^2+23s+30}{(s-2)(s^2+2s+5)}$ (d) $s^2F(s)-4F(s)=\dfrac{5}{s+1}$

(e) $sF(s)+2F(s)=\dfrac{10s^2+12s+14}{s^2-2s+2}$

Odgovori:

1.

(a) $e^{t}t^{3}$ (b) $e^{-t}\cos 3t$ (c) $\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t$

(d) $2e^{-2t}\cos 3t+4e^{-2t}\sin 3t$

(e) $\frac{3}{2}e^{t}\cos 2t-3e^{t}\sin 2t$

2.

(a) $\frac{6}{s+5}-\frac{1}{s+2}-\frac{4}{s-1}$ (b) $\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{2}{s}$

(c) $-\frac{3}{s+1}+\frac{(s-1)+2}{(s-1)^2+4}$ (d) $-\frac{5}{6s}+\frac{11}{10(s-2)}-\frac{4}{15(s+3)}$

(e) $\frac{1}{17}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{4}{(s+1)^2+1}\right)$

3.

(a) $\frac{1}{3}+e^{t}+\frac{14}{3}e^{6t}$ (b) $-e^{-3t}+2te^{-3t}+6e^{-t}$

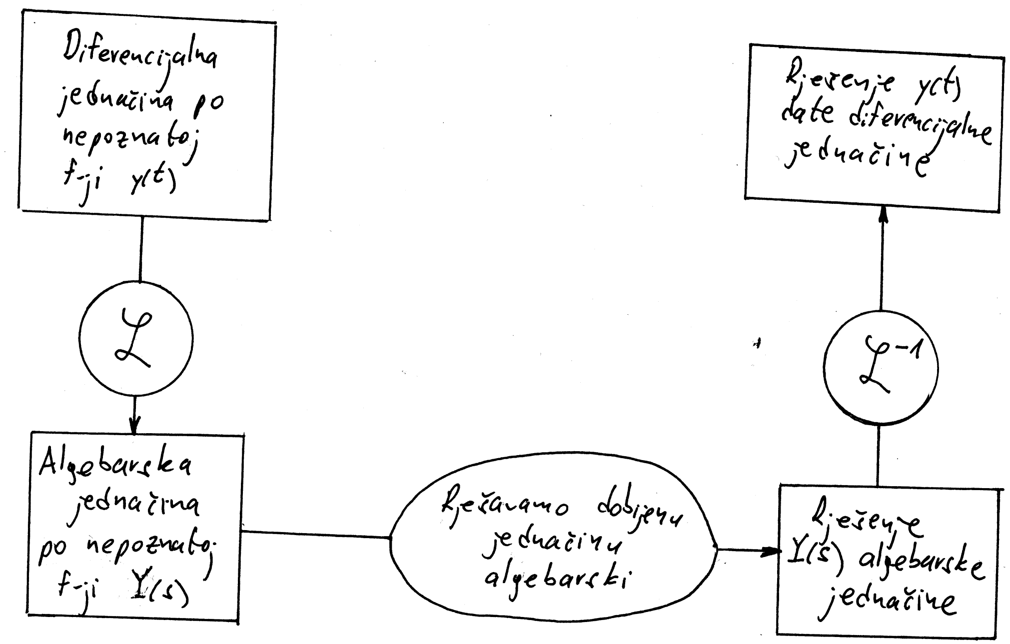
(c) $8e^{2t}-e^{-t}\cos 2t+3e^{-t}\sin 2t$

(d) $-\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{5}{12}e^{2t}+\frac{5}{4}e^{-2t}$

(e) $3e^{-2t}+7e^{t}\cos t+11e^{t}\sin t$

Primjena Laplaceove transformacije pri rješavanju diferencijalnih jednačina

Proceduru za rješavanje diferencijalne jednačine možemo ilustrirati na sljedeći način



(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y''-y=-t; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

Rj.

$$y''-y=-t$$

$$\mathcal{L}\{y''-y\}(s)=\mathcal{L}(-t)$$

$$\mathcal{L}\{y''\}(s)-\mathcal{L}\{y\}(s)=-\mathcal{L}\{t\}(s) \qquad \dots (*)$$

Neka je $Y(s)=\mathcal{L}\{y\}(s)$. Kako je

$$\mathcal{L}\{t\}(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{y''\}(s)=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-1$$

to, prema $(*)$, imamo

$$s^2Y(s)-1-Y(s)=-\frac{1}{s^2} \qquad 1-\frac{1}{s^2}=\frac{s^2-1}{s^2}$$

$$(s^2-1)Y(s)=1-\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{s^2-1}{s^2(s^2-1)}=\frac{1}{s^2}$$

Kako je $\mathcal{L}\{t\}(s)=\frac{1}{s^2}$ i imamo $Y(s)=\mathcal{L}\{y\}(s)$

to je

$$y(t)=t$$

traženo rješenje.

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y''-2y'+5y=-8e^{-t}; \quad y(0)=2, \quad y'(0)=12.$$

Rj.

$$y''-2y'+5y=-8e^{-t}$$

$$\mathcal{L}\{y''-2y'+5y\}(s)=\mathcal{L}\{-8e^{-t}\}(s)$$

$$\mathcal{L}\{y''\}(s)-2\mathcal{L}\{y'\}(s)+5\mathcal{L}\{y\}(s)=-8\,\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \qquad \dots (1)$$

Neka je $Y(s)=\mathcal{L}\{y\}(s)$. Znamo da

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s)=sY(s)-y(0)=sY(s)-2,$$

$$\mathcal{L}\{y''\}(s)=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-2s-12$$

Ako ove izraze zamjenimo u (1) imamo

$$\left(\underline{\underline{s^2Y(s)}}-2s-12\right)-\underline{\underline{2(sY(s)}}-2\Big)+5Y(s)=\frac{-8}{s+1}$$

$$(s^2-2s+5)Y(s)=2s+8-\frac{8}{s+1}$$

$$(s^2-2s+5)Y(s)=\frac{2s^2+10s}{s+1}$$

$$Y(s)=\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)} \quad \boxed{=\frac{3(s-1)+2\cdot 4}{(s-1)^2+2^2}-\frac{1}{s+1}}$$

Ostalo je još da izračunamo inverznu transformaciju racionalne f-je $Y(s)$. Ovo smo već jednom uradili u jednom primjeru iz prethodne lekcije.

$$y(t)=3e^{t}\cos 2t+4e^{t}\sin 2t-e^{-t}$$

traženo rješenje

Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' + 4y' - 5y = te^t; \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$$

Rj.

$$y''+4y'-5y=te^t$$

$$\mathcal{L}\{y''+4y'-5y\}(s) = \mathcal{L}\{te^t\}(s)$$

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + 4\mathcal{L}\{y'\}(s) - 5\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{te^t\}(s) \qquad \dots(1)$$

Neka je $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. Kako je

$$\mathcal{L}\{te^t\}(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s$$

to (iz izraza (1)) imamo

$$(s^2Y(s)-s) + 4(sY(s)-1) - 5Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$(s^2+4s-5)Y(s) = s+4+\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$(s+5)(s-1)Y(s) = \frac{s^3+2s^2-7s+5}{(s-1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{s^3+2s^2-7s+5}{(s+5)(s-1)^3}$$

$$\frac{s^3+2s^2-7s+5}{(s+5)(s-1)^3} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3}$$

ZA VJEŽBU $\Rightarrow$ $A = \frac{35}{216}$, $B = \frac{181}{216}$, $C = -\frac{1}{36}$, $D = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{35}{216}\left(\frac{1}{s+5}\right) + \frac{181}{216}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{36}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{2}{(s-1)^3}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{35}{216}e^{-5t} + \frac{181}{216}e^t - \frac{1}{36}te^t + \frac{1}{12}t^2e^t$$

traženo rješenje

Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$w''(t) - 2w'(t) + 5w(t) = -8e^{\pi-t}; \quad w(\pi)=2, \quad w'(\pi)=12.$$

Rj. Da bi koristili metodu Laplasove transformacije, prvo moramo pomjeriti inicijalni uslov na vrijednost $t=0$. Ovo možemo uraditi tako što ćemo uvesti smjenu

$$y(t) := w(t+\pi) \qquad (y(0) = w(\pi))$$

Tada

$$y'(t) = w'(t+\pi) \quad ; \quad y''(t) = w''(t+\pi)$$

Zamjenjujući t sa $t+\pi$ u datoj diferencijalnoj jednačini ta jednačina postaje

$$w''(t+\pi) - 2w'(t+\pi) + 5w(t+\pi) = -8e^{\pi-(t+\pi)} = -8e^{-t} \qquad \dots(1)$$

Zamjenjujući $y(t) = w(t+\pi)$ u (1), data diferencijalna jednačina postaje

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = -8e^{-t}; \quad y(0)=2, \quad y'(0)=12.$$

Sad kako je inicijalni uslov dat za $t=0$, možemo iskoristiti metod Laplasove transformacije.

Primjetimo da smo ovu diferencijalnu jednačinu sa istim inicijalnim uslovima već imali, gdje smo pronašli da je njezino rješenje

$$y(t) = 3e^t\cos 2t + 4e^t\sin 2t - e^{-t} \qquad \dots(2)$$

Kako je $w(t+\pi) = y(t)$ tada $w(t) = y(t-\pi)$ pa zamjenjujući t sa

$t-\pi$ u (2) dobijamo

$$w(t) = y(t-\pi) = 3e^{t-\pi}\cos\left(2(t-\pi)\right) + 4e^{t-\pi}\sin\left[2(t-\pi)\right] - e^{-(t-\pi)}$$

$$= 3e^{t-\pi}\cos 2t + 4e^{t-\pi}\sin 2t - e^{\pi-t}$$

$$\cos(2t-2\pi) = \cos 2t\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} + \sin 2t\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} = \cos 2t$$

$$\sin(2t-2\pi) = \sin 2t\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - \underbrace{\sin 2\pi}_{=0}\cos 2t = \sin 2t$$

$$w(t) = 3e^{t-\pi}\cos 2t + 4e^{t-\pi}\sin 2t - e^{\pi-t}$$

traženo rješenje

Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' + 2ty' - 4y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Rj.

$$y'' + 2ty' - 4y = 1$$

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + 2\mathcal{L}\{ty'\}(s) - 4\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{1\}$$

Neka je $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. Tada

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) - 2\mathcal{L}\{ty'\}(s) - 4Y(s) = \frac{1}{s} \qquad \dots (*)$$

Dalje, kako je

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{ty(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\}(s)$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) = -sY'(s) - Y(s)$$

Ako zadnja dva izraza uvrstimo u (*) imamo

$$s^2Y(s) + 2\left(-sY'(s) - Y(s)\right) - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$-2sY'(s) + (s^2-6)Y(s) = \frac{1}{s} \qquad /:(-2s)$$

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)Y(s) = -\frac{1}{2s^2}$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina prvog reda

$$Y'(s)+\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{2}\right)Y(s)=\frac{-1}{2s^2} \qquad \ldots(1)$$

$$\mu(s)=e^{\int\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{2}\right)dx}=e^{\ln s^3-\frac{1}{4}s^2}=s^3e^{-\frac{s^2}{4}} \qquad \ldots(2)$$

Sad ako (1) pomnožimo sa (2)

$$\underbrace{Y'(s)\cdot\mu(s)+\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{2}\right)s^3e^{-\frac{s^2}{4}}Y(s)}_{=\frac{d}{ds}(\mu(s)Y(s))}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot s^3e^{-\frac{s^2}{4}}$$

$$\left(s^3e^{-\frac{s^2}{4}}\right)'_s=3s^2e^{-\frac{s^2}{4}}+s^3\cdot e^{-\frac{s^2}{4}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)2s=e^{-\frac{s^2}{4}}\left(3s^2-\frac{1}{2}s^4\right)$$

$$=\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{2}\right)s^3e^{-\frac{s^2}{4}}.$$

$$\frac{d}{ds}\left(\mu(s)Y(s)\right)=\frac{d}{ds}\left(s^3e^{-\frac{s^2}{4}}Y(s)\right)=-\frac{1}{2}se^{-\frac{s^2}{4}}$$

Sad ako integriramo $\quad s^3e^{-\frac{s^2}{4}}Y(s)=\underbrace{-\frac{1}{2}\int se^{-\frac{s^2}{4}}ds}_{=\int e^{-\frac{s^2}{4}}d\left(-\frac{s^2}{4}\right)}$

$$d\left(-\frac{s^2}{4}\right)=-\frac{1}{4}\cdot 2s\,ds=-\frac{s}{2}ds$$

$$s^3e^{-\frac{s^2}{4}}Y(s)=e^{-\frac{s^2}{4}}+C \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^3}+C\frac{e^{s^2/4}}{s^3}$$

Sada ćemo iskoristiti sljedeću tvrdnju:

<u>Ako je $f(t)$ po dijelovima neprekidna na $[0,\infty)$ i eksponencijalnog reda tada</u> $\lim\limits_{s\to\infty}\mathcal{L}\{f\}(s)=0$

Sad, prema ovoj tvrdnji, ako je $Y(s)$ Laplasova transformacija po djelovima neprekidne f-je eksponencijalnog reda, tada slijedi:

$$\lim_{s\to\infty}Y(s)=0.$$

Za $Y(s)=\frac{1}{s^3}+C\frac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}$, za kakvo C će vrijediti da $\lim\limits_{s\to\infty}Y(s)=0$?

S obzirom da je $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{e^{s^2/4}}{s^3}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L.P.}{=}\lim\limits_{s\to\infty}\frac{\frac{1}{4}2s\,e^{\frac{s^2}{4}}}{3s^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\lim\limits_{s\to\infty}\frac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s}$

$=\ldots=\infty$, imamo, da mora biti $C=0$ (u suprotnom data tvrdnja nije ispunjena.

Prema tome $Y(s)=\frac{1}{s^3}$ i primjenjujući inverznu transformaciju dobijamo

$$y(t)=\frac{1}{2}t^2$$

rješenje date diferencijalne jednačine.

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$x'' - x' - 6x = 0; \quad x(0)=2, \quad x'(0) = -1.$$

R:

$$x'' - x' - 6x = 0$$

$$\mathcal{L}\{x''-x'-6x\}(s) = \mathcal{L}\{0\}(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{x''\}(s) - \mathcal{L}\{x'\}(s) - 6\mathcal{L}\{x\}(s) = \mathcal{L}\{0\}(s)$$

Označimo sa $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$. S obzirom da je

$$\mathcal{L}\{0\}(s) = 0$$

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) = s\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - x(0) = sX(s) - 2$$

$$\mathcal{L}\{x''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s + 1$$

imamo

$$\left(s^2X(s) - 2s + 1\right) - \left(sX(s) - 2\right) - 6X(s) = 0$$

$$(s^2 - s - 6)X(s) - 2s + 3 = 0$$

$$X(s) = \frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{2s-3}{(s-3)(s+2)}$$

Odredimo koeficijente A i B t.d. $\frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} \quad /(s-3)(s+2)$

$$2s-3 = A(s+2) + B(s-3)$$

Stavljajući $s=3 \Rightarrow A = \frac{3}{5}$, a za $s=-2 \Rightarrow B = \frac{7}{5}$. Prema tome

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{\frac{3}{5}}{s-3} + \frac{\frac{7}{5}}{s+2}$. Kako je $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

slijedi $x(t) = \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{7}{5}e^{-2t}$

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$x'' + 4x = \sin 3t; \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

R:

$$x'' + 4x = \sin 3t$$

$$\mathcal{L}\{x''+4x\}(s) = \mathcal{L}\{\sin 3t\}(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{x''\}(s) + 4\mathcal{L}\{x\}(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

Neka je $\mathcal{L}\{x\}(s) = X(s)$. S obzirom da je

$$\mathcal{L}\{x''\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s)$$

imamo

$$s^2X(s) + 4X(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$X(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

Odredimo koeficijente A, B, C, D t.d. $\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+9}$

$$3 = (As+B)(s^2+9) + (Cs+D)(s^2+4)$$

$$3 = A(s^3+9s) + B(s^2+9) + C(s^3+4s) + D(s^2+4)$$

$$\begin{array}{ll} A + C = 0 & \Rightarrow A = -C \\ B + D = 0 & \Rightarrow B = -D \\ 9A + 4C = 0 & \\ 9B + 4D = 3 & \end{array}$$

$\Rightarrow A = 0,\ C = 0,\ B = \frac{3}{5},\ D = -\frac{3}{5}$

Time smo dobili

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{s^2+2^2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}$$

Kako je $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$ i $\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s) = \frac{3}{s^2+9}$ slijedi da

$$x(t) = \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t.$$

Zadaci za vježbu

1. Korištenjem metode Laplasovih transformacija rješiti diferencijalne jednačine

(a) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$

(b) $y'' + 6y' + 9y = 0$; $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 6$

(c) $w'' + w = t^2 + 2$; $\quad w(0) = 1, \quad w'(0) = -1$

(d) $y'' - 7y' + 10y = 9\cos t + 7\sin t$; $\quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -4$.

2. Primjenom Laplace-ove transformacije izvesti izraz za nepoznatu f-ju $Y(s)$ za datu diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

(a) $y'' - 3y' + 2y = \cos t$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

(b) $y'' + y' - y = t^3$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(c) $y'' + 5y' - y = e^t - 1$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

(d) $y'' - 2y' + y = \cos t - \sin t$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$.

3. Primjenom metode Laplasove transformacije rješiti diferencijalnu jednačinu trećeg reda

(a) $y''' - y'' + y' - y = 0$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 3$

(b) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; $\quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = -2$

4. Rešiti diferencijalne jednačine

(a) $y'' + 3ty' - 6y = 1$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

(b) $ty'' - 2y' + ty = 0$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

Odgovori

1.

(a) $2e^t \cos 2t + e^t \sin 2t$

(b) $-e^{-3t} + 3te^{-3t}$

(c) $t^2 + \cos t - \sin t$

(d) $\cos t - 4e^{5t} + 8e^{2t}$

2.

(a) $Y(s) = \dfrac{-s^2 + s - 1}{(s^2+1)(s-1)(s-2)}$

(b) $\dfrac{s^5 + s - 1}{s^4(s^2 + s - 1)}$

(c) $\dfrac{s^3 + 5s^2 - 6s + 1}{s(s-1)(s^2 + 5s - 1)}$

(d) $\dfrac{s^3 + s^4 + 6}{(s^2+1)(s-1)^2}$

3.

(a) $2e^t - \cos t - \sin t$

(b) $(t^2 - 4)e^{-t}$

4.

(a) $\dfrac{t^2}{2}$

(b) uputa: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}(t) = \dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

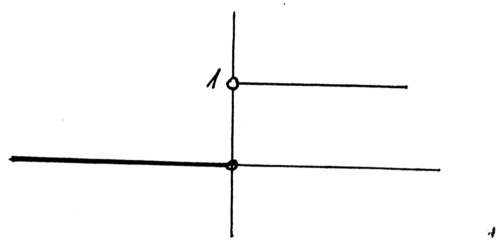
$\cos t + t\sin t + c(\sin t - t\cos t)$, c proizvoljno

Laplaceova transformacija prekidnih i periodičnih f-ja

F-ja $u(t)$ definisana sa

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0<t\end{cases} \qquad (t>0)$$

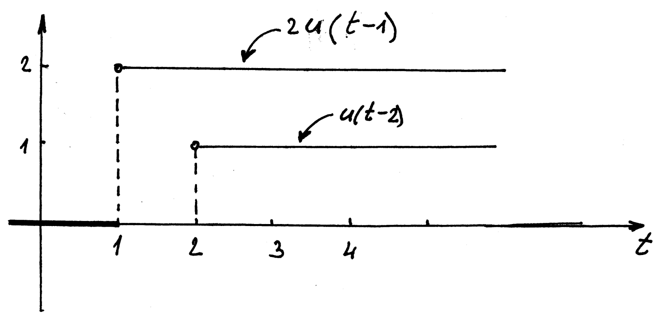
zove se step f-ja ili jedinična f-ja.



Primjetimo da

$$u(t-a)=\begin{cases}0, & t-a<0\\ 1, & 0<t-a\end{cases}=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & a<t\end{cases}$$

$$Mu(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ M, & a<t\end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{u(t)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}, \quad s>0$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\,dt=\int_a^\infty e^{-st}dt=\lim_{N\to\infty}\frac{-e^{-st}}{s}\Big|_a^N=\frac{e^{-as}}{s}$$

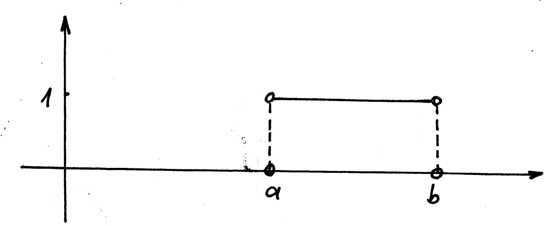
Prema tome

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t)\}(s)=\frac{1}{s}, \quad s>0} \qquad \boxed{\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s)=\frac{e^{-as}}{s}, \quad s>0}$$

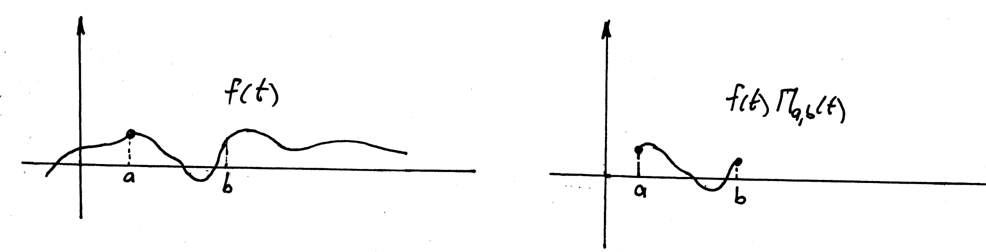
F-ja $\Pi_{a,b}(t)$ definisana sa

$$\Pi_{a,b}(t):=u(t-a)-u(t-b)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & a\leq t<b\\ 0, & b<t\end{cases}$$

se naziva gate f-ja ili pravougaona prozor f-ja.



gate f-ja ili pravougaona prozor f-ja



Efekat koju pravi f-ja $\Pi_{a,b}(t)$

#) Datu f-ju

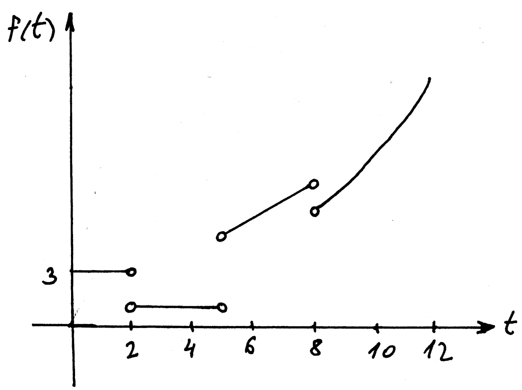
$$f(t)=\begin{cases} 3, & t<2 \\ 1, & 2<t<5 \\ t, & 5<t<8 \\ t^2/10, & 8<t \end{cases}$$

napisati u obliku zbira step i gate f-ja.

Rj.

Primjetimo da nam gate f-ja treba na intervalima $(0,2)$, $(2,5)$ i $(5,8)$ dok ćemo step f-ju upotrebiti za $t>8$.

$$f(t)=3\Pi_{0,2}(t)+1\Pi_{2,5}(t)+t\,\Pi_{5,8}(t)+\frac{t^2}{10}u(t-8)$$



Kako je

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s)=\frac{e^{-as}}{s}$$

za $a>0$, kažemo da po dijelovima neprekidna f-ja $u(t-a)$ ima inverznu Laplaceovu transformaciju e^{-as}/s i pišemo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\}(t)=u(t-a)$$

Za pravougaonu prozor f-ju imamo

$$\mathcal{L}\{\Pi_{a,b}(t)\}(s)=\mathcal{L}\{u(t-a)-u(t-b)\}(s)=\frac{e^{-sa}-e^{-sb}}{s},\quad 0<a<b$$

Također vrijedi sljedeća osobina za Laplaceovu transformaciju

Translacija po t

Neka je $F(s)=\mathcal{L}\{f\}(s)$ za $s>\alpha\geq 0$ i neka je $a>0$. Tada

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s)=e^{-as}F(s)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t)=f(t-a)u(t-a).$$

Odavde slijedi da

$$\boxed{\mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\}(s)=e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s)}$$

Odrediti Laplaceovu transformaciju f-je $t^2 u(t-1)$.

Rj.

Da bi primjenili sljedeću osobinu Laplaceove transforma.

$$\mathcal{L}\{g(t)\,u(t-a)\}(s) = e^{-as}\,\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s) \quad \ldots(1)$$

uzedemo da je $g(t)=t^2$ i $a=1$. Tada

$$g(t+a) = g(t+1) = (t+1)^2 = t^2+2t+1$$

pa je

$$\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s) = \mathcal{L}\{t^2+2t+1\}(s) = \frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}$$

Pa je prema formuli (1)

$$\mathcal{L}\{t^2 u(t-1)\}(s) = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

Odrediti $\mathcal{L}\{(\cos t)\,u(t-\pi)\}$.

Rj. Znamo

$$\underline{\mathcal{L}\{g(t)\,u(t-a)\}(s) = e^{-as}\,\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s)} \quad \ldots(1)$$

Ako je $g(t)=\cos t$ i $a=\pi$ imamo

$$g(t+a) = g(t+\pi) = \cos(t+\pi) = \cos t\cos\pi - \sin t\sin\pi = -\cos t$$

$$\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s) = -\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = -\frac{s}{s^2+1}$$

Sad prema formuli (1)

$$\mathcal{L}\{(\cos t)\,u(t-\pi)\}(s) = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}.$$

Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$ i skicirati grafik.

Rj. Da bi iskoristili osobinu translacije

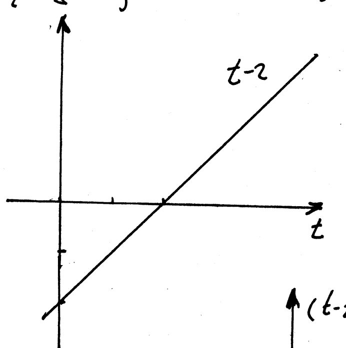
$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = f(t-a)\,u(t-a) \qquad \ldots(1)$$

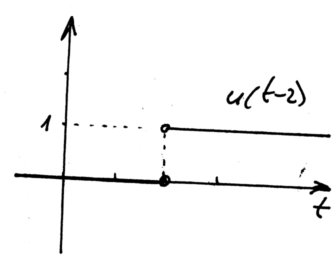
prvo ćemo izraz $\frac{e^{-2s}}{s^2}$ izraziti kao proizvod $e^{-as}F(s)$. Za ovaj zadatak, vidimo da je $e^{-as}=e^{-2s}$ i $F(s)=\frac{1}{s^2}$. Time je $a=2$ pa imamo

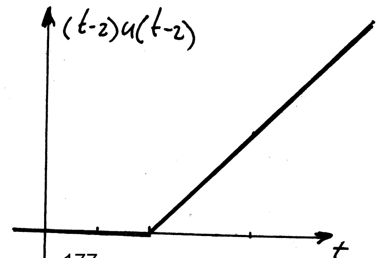
$$F(s)=\frac{1}{s^2}=\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t)=t$$

Pa ako iskoristimo (1)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}(t)=f(t-2)\,u(t-2)=(t-2)\,u(t-2)$$







Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y''(t)+4y(t)=g(t); \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

gdje je

$$g(t):=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ -1, & 1<t<2\\ 0, & 2<t\end{cases}$$

Rj. Označimo sa $F(s)$ Laplasovu transformaciju f-je $y=y(t)$ tj. $F(s):=\mathcal{L}\{y\}(s)$. Tada

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s)=s^2\mathcal{L}\{y\}(s)-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2F(s)$$

Ako f-ju $g(t)$ napišemo u obliku zbira pravougaone prozor f-je $\Pi_{a,b}(t)=u(t-a)-u(t-b)$ dobićemo

$$g(t)=\Pi_{0,1}(t)+(-1)\Pi_{1,2}(t)=u(t)-u(t-1)-\big(u(t-1)-u(t-2)\big)$$
$$=1-2u(t-1)+u(t-2)$$

pa je

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s)=\frac{1}{s}-\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}$$

Sad ako primjenimo Laplace-ovu transformaciju na obe strane date diferencijalne jednačine $y''(t)+4y(t)=g(t)$ imamo

$$\mathcal{L}\{y''\}(s)+4\mathcal{L}\{y\}(s)=\mathcal{L}\{g\}(s)$$

$$s^2F(s)+4F(s)=\frac{1}{s}-\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}-\frac{2e^{-s}}{s(s^2+4)}+\frac{e^{-2s}}{s(s^2+4)}$$

Sad primjetimo da ako stavimo da je $H(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}$ imamo

$$F(s)=H(s)-2e^{-s}H(s)+e^{-2s}H(s)$$

Zašto smo u igru uveli $H(s)$? Želimo da iskoristimo osobinu translacije

$$\underline{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t)=f(t-a)u(t-a)} \qquad \dots (1)$$

$$H(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bc+D}{s^2+4}=\underset{\dots}{\overset{\text{ZA VJEŽBU}}{=}}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$h(t):=\mathcal{L}^{-1}\{H\}(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t$$

Sad ako iskoristimo osobinu translacije (1) imamo

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)-2e^{-s}H(s)+e^{-2s}H(s)\}(t)\\&=h(t)-2h(t-1)u(t-1)+h(t-2)u(t-2)\\&=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(t-1)\right)u(t-1)\\&\quad+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2(t-2)\right)u(t-2)\end{aligned}$$

Periodične f-je

Za f-ju $f(t)$ kažemo da je periodična perioda T $(\neq 0)$ ako je $f(t+T)=f(t)$ za sve t u domenu f-je f.

Transformacija periodične f-je

Ako f-ja f ima period T i po djelovima je neprekidna na intervalu $[0,T]$ tada su Laplace-ove transformacije

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt \quad ; \quad F_T(s)=\int_0^{T}e^{-st}f(t)\,dt$$

povezane sljedećom formulom

$$\boxed{F_T(s)=F(s)\left[1-e^{-sT}\right]} \quad \text{ili} \quad \boxed{F(s)=\frac{F_T(s)}{1-e^{-sT}}}$$

dokaz za ovo nije težak. Prvo primjetimo da

$$f_T(t):=f(t)\Pi_{0,T}(t)=f(t)\left(u(t)-u(t-T)\right)=\begin{cases}f(t), & 0<t<T\\ 0, & \text{u suprotnom}\end{cases}$$

pa imamo

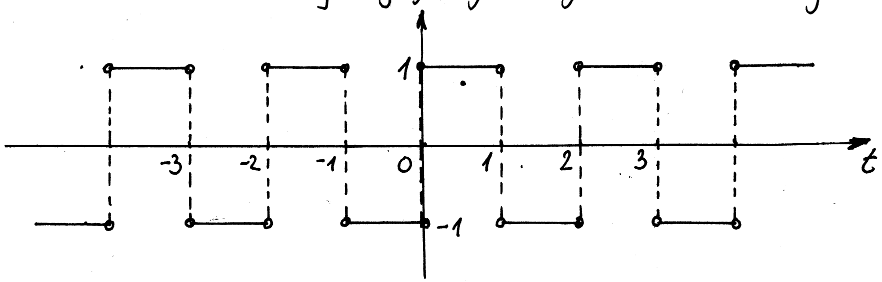
$$f_T(t)=f(t)u(t)-f(t)u(t-T)=f(t)u(t)-f(t-T)u(t-T)$$

sad primjenjujući Laplace-ovu transformaciju na obe strane i iskoristivši osobinu $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s)=e^{-as}F(s)$ dobićemo

$$F_T(s)=F(s)-e^{-sT}F(s)$$

što je ekvivalentno sa zaokruženim formulama.

\# Odrediti $\mathcal{L}\{f\}$ gdje je f-ja f data grafikom



Data f-ja je poznata pod imenom kvadratna talasna funkcija.

Rj. Primjetimo da je period ove f-je $T=2$. Tada je

$$f_T(t)=\Pi_{0,1}(t)-\Pi_{1,2}(t)$$

pa prema

$$\mathcal{L}\{\Pi_{a,b}(t)\}(s)=\frac{1}{s}(e^{-sa}-e^{-sb})$$

imamo da je $F_T(s)=\frac{1}{s}(1-e^{-s})-\frac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s})=\frac{(1-e^{-s})^2}{s}$

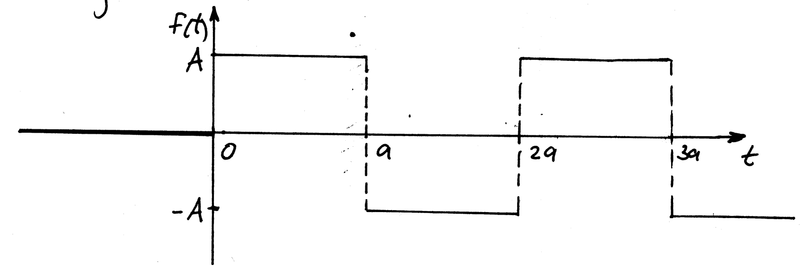
Sad iz osobine transformacije periodične f-je

$$F(s)=\frac{F_T(s)}{1-e^{-sT}}$$

imamo

$$\mathcal{L}\{f\}=\frac{\frac{1}{s}(1-e^{-s})^2}{1-e^{-2s}}=\frac{1-e^{-s}}{(1+e^{-s})s}.$$

\# Odrediti Laplaceovu transformaciju f-je f zadanu grafikom



Rj. Period date f-je je $T=2a$. Imamo da je

$$f_T(t)=A\,\Pi_{0,a}(t)-A\,\Pi_{a,2a}(t)$$

Kako je $\mathcal{L}\{\Pi_{a,b}(t)\}(s)=\frac{1}{s}(e^{-sa}-e^{-sb})$, to je

$$\mathcal{L}\{f_T(t)\}(s)=\frac{A}{s}(e^{-s\cdot 0}-e^{-sa})-\frac{A}{s}(e^{-sa}-e^{-2sa})$$

$$=\frac{A}{s}\underbrace{\left(1-2e^{-sa}+(e^{-sa})^2\right)}_{(1-e^{-as})^2}=\frac{A}{s}(1-e^{-as})^2$$

Sad prema osobini transformacije periodične f-je,

$$F(s)=\frac{F_T(s)}{1-e^{-sT}}$$

imamo

$$\mathcal{L}\{f\}=\frac{\frac{A}{s}(1-e^{-as})^2}{1-e^{-2sa}}=\frac{A}{s}\cdot\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}\;th\left(\frac{as}{2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} shx&=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\\ chx&=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\end{aligned}}$$

Odrediti $\mathcal{L}\{\sin t\, u(t)\}$.

Rj.

Znamo da

$$\mathcal{L}\{g(t)\,u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s)$$

Prema tome za $g(t)=\sin t$, $a=0$ imamo

$$\mathcal{L}\{\sin t\, u(t)\}(s) = e^{0}\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Odrediti $\mathcal{L}\{\sin(t-2)\,u(t-2)\}$.

Rj. Znamo

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f\}(s)$$

za $f(t-a)=\sin(t-a)$ i $a=2$ imamo

$$\mathcal{L}\{\sin(t-2)\,u(t-2)\}(s) = e^{-2s}\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+1}$$

Odrediti Laplace-ove transformacije sljedećih f-ja

(a) $(t-2)^2u(t)$

(b) $(t-2)^2u(t-2)$

(c) $(t-2)^2e^{-t}$

(d) $(t-2)^2u(t-2)\,e^{-t}$

Rj. U rješenju ćemo koristiti sljedeće dvije formule

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f\}(s) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s)$$

(a) $(t-2)^2 = t^2-4t+4$

$$\mathcal{L}\{(t-2)^2u(t)\} = \mathcal{L}\{t^2u(t)\}(s) - 4\mathcal{L}\{tu(t)\}(s) + 4\mathcal{L}\{u(t)\}(s)$$

$$= \frac{2}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}$$

(b) Kako je $\mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2}{s^3}$ to je $\mathcal{L}\{(t-2)^2u(t-2)\} = e^{-2s}\frac{2}{s^3}$

(c) Prema osobini translacije po s $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$

i dijela pod (a) imamo

$$\mathcal{L}\{(t-2)^2e^{-t}\} = \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+1}$$

(d) Možemo iskoristiti osobinu translacije po s i dio pod (b)

$$\mathcal{L}\{(t-2)^2u(t-2)e^{-t}\}(s) = e^{-2(s+1)}\frac{2}{(s+1)^3}$$

Odrediti Laplace-ove transformacije f-ja

(a) $f(t)=(t-3)^4 e^{-2t}u(t-3)$

(b) $g(t)=(t-3)^4 e^{-2t}u(t)$.

Rj.

(a) $\mathcal{L}\{t^4\} = \frac{4!}{s^5} = \frac{24}{s^5}$

$$\mathcal{L}\{(t-3)^4 u(t-3)\}(s) = \frac{24}{s^5}\cdot e^{-3s}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}(t-3)^4 u(t-3)\}(s) = \frac{24}{(s+2)^5}\, e^{-3(s+2)}$$

(b)

$$\mathcal{L}\{(t-3)^4 e^{-2t}u(t)\} =$$

$$= (t^4-12t^3+54t^2-108t+81)\, e^{-2t}u(t)$$

$$= \frac{24}{(s+2)^5} - 12\,\frac{6}{(s+2)^4} + 54\,\frac{2}{(s+2)^3} - 108\,\frac{1}{(s+2)^2} + 81\,\frac{1}{s+2}$$

Odrediti Laplaceovu transformaciju f-je

$$f(t) = \begin{cases} 3, & 0<t<2 \\ -1, & 2<t<4 \\ 0, & t>4 \end{cases}$$

Rj. U rješenju koristimo prikaz pomoću gate f-je

$$f(t) = 3\Pi_{0,2}(t) - \Pi_{2,4}(t) = 3(u(t)-u(t-2)) - (u(t-2)-u(t-4)) =$$

$$= 3u(t) - 4u(t-2) + u(t-4)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = 3\cdot\frac{1}{s} - 4\cdot\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-4s}}{s} = \frac{3-4e^{-2s}+e^{-4s}}{s}$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je.

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0<t<1 \\ 3t, & 1<t<2 \\ 4e^t, & 2<t \end{cases}$$

Rj.

$$f(t) = 2\Pi_{0,1}(t) + 3t\,\Pi_{1,2}(t) + 4e^t u(t-2) =$$

$$= 2(u(t)-u(t-1)) + 3t(u(t-1)-u(t-2)) + 4e^t u(t-2) =$$

$$= 2u(t) + (3t-2)u(t-1) + (4e^t-3t)u(t-2)$$

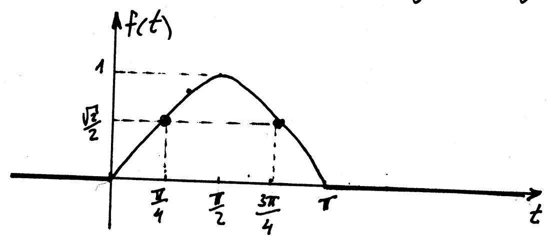
$$= 2u(t) + [3(t-1)+1]u(t-1) + [4e^2 e^{t-2} - 3(t-2) - 6]u(t-2)$$

Kako je $\mathcal{L}\{2\} = \frac{2}{s}$; $\mathcal{L}\{3t+1\}(s) = \frac{3}{s^2}+\frac{1}{s}$; $\mathcal{L}\{4e^2e^t-3t-6\}(s) = 4e^2\frac{1}{s-1}+\frac{3}{s^2}-\frac{6}{s}$

imamo $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-0\cdot s}\frac{2}{s} + e^{-1\cdot s}\left(\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s}\right) + e^{-2s}\left(\frac{4e^2}{s-1} - \frac{3}{s^2} - \frac{6}{s}\right) =$

$$= \frac{2}{s} + \frac{s+3}{s^2}e^{-s} + \left(\frac{4e^2}{s-1} - 3\,\frac{2s+1}{s^2}\right)e^{-2s}.$$

Odrediti Laplaceovu transformaciju f-j zadanu grafikom:



Rj. Primjetimo da datu f-ju možemo napisati u obliku

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

ili sa

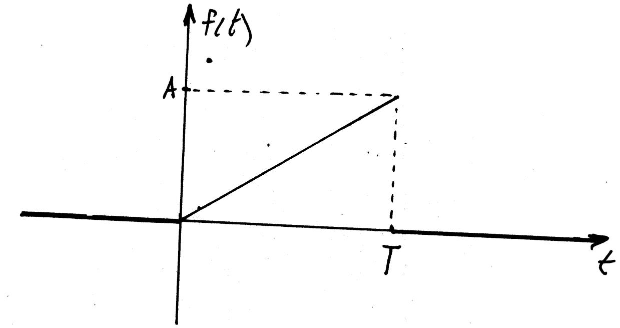
$$f(t) = \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t) = \sin t\,[u(t) - u(t-\pi)]$$
$$= \sin t\, u(t) - \sin t\, u(t-\pi)$$

Kako je $\sin(t-\pi) = \sin t \cos\pi + \sin\pi \cos t = -\sin t$ to je

$$f(t) = \sin t\, u(t) + \sin(t-\pi)u(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je zadanu grafikom:



Rj. Data je sljedeća f-ja

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t, & 0 < t < T \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

F-ju možemo napisati u obliku

$$f(t) = \frac{A}{T} t\, \Pi_{0,T}(t) = \frac{A}{T}\Big(u(t) - u(t-T)\Big)$$

Da bismo odredili njezinu transformaciju moramo je dovesti u odgovarajući oblik

$$f(t) = \frac{A}{T} t\, u(t) - \frac{A}{T}(t - T + T)u(t-T)$$
$$= \frac{A}{T} t u(t) - \frac{A}{T}(t-T)u(t-T) - Au(t-T)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{A}{T}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{A}{T}\cdot\frac{e^{-Ts}}{s^2} - \frac{Ae^{-Ts}}{s}$$

(#) Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s\pi}(1+e^{-s\pi})}{s^2+1}\right\}$.

Rj. Napišimo orginal u obliku

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}+\frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}$$

Sad imamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t)=\sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\}(t)=\sin(t-\pi)u(t-\pi)$$

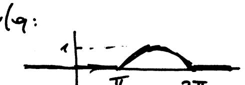
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}\right\}(t)=\sin(t-2\pi)u(t-2\pi)$$

Prema tome

$$f(t)=\underbrace{\sin(t-\pi)}_{=-\sin t}u(t-\pi)+\underbrace{\sin(t-2\pi)}_{=\sin t}u(t-2\pi)=$$

$$=-\sin u(t-\pi)+\sin t\,u(t-2\pi)=-\sin t\left(u(t-\pi)-u(t-2\pi)\right)$$

$$=-\sin t\,\Pi_{\pi,2\pi}(t)=\begin{cases}-\sin t, & \pi<t<2\pi\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$$

(za vježbu skicirati grafik f-je $f(t)$, uputa: )

Zadaci za vježba

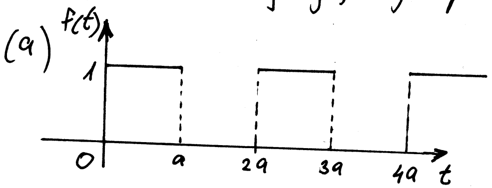
(1.) Skicirati graf datih f-ja i odrediti njihove Laplaceove transformacije
(a) $(t-1)^2u(t-1)$
(b) $t^2u(t-2)$

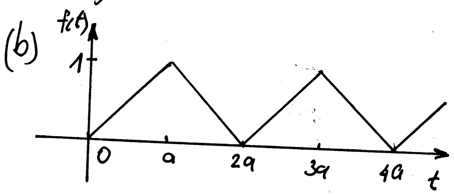
(2.) Odrediti inverznu Laplaceovu transformaciju datih f-ja

(a) $\frac{e^{-2s}}{s-1}$ (b) $\frac{e^{-2s}-3e^{-4s}}{s+2}$ (c) $\frac{se^{-3s}}{s^2+4s+5}$

(d) $\frac{e^{-3s}(s-5)}{(s+1)(s+2)}$ (e) $\frac{e^{-s}(3s^2-s+2)}{(s-1)(s^2+1)}$.

(3.) Odrediti $\mathcal{L}\{f\}$ gdje je periodična f-ja f opisana grafikom

(a) 

(b) 

(4.) Riješiti diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom. Skicirati grafik rješenja

(a) $y''+y=u(t-3)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ (b) $y''+y=t-(t-4)u(t-2)$, $y'(0)=1$, $y(0)=0$

(5.) Riješiti date diferencijalne jednačine koristeći metodu Laplaceove transformacije

(a) $y''+2y'+2y=u(t-2\pi)-u(t-4\pi)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$;
(b) $z''+3z'+2z=e^{-3t}u(t-2)$, $z(0)=2$, $z'(0)=-3$;
(c) $y''+4y=g(t)$; $y(0)=1$, $y'(0)=3$ gdje je $g(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t\le 2\pi\\ 0, & 2\pi<t\end{cases}$

(d) $y'' + 5y' + 6y = g(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$, gdje je

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t, & 1 < t < 5 \\ 1, & 5 < t \end{cases}$$

Odgovori:

1. (a) $\frac{2e^{-s}}{s^3}$ (b) $\frac{e^{-2s}(4s^2+4s+2)}{s^3}$

2. (a) $e^{t-2}u(t-2)$ (b) $e^{-2(t-2)}u(t-2) - 3e^{-2(t-4)}u(t-4)$

(c) $e^{-2(t-3)}[\cos(t-3) - 2\sin(t-3)]u(t-3)$

(d) $(7e^{6-2t} - 6e^{3-t})u(t-3)$

3. (a) $\frac{1}{s(1+e^{-as})}$ (b) $\frac{1-e^{-as}}{as^2(1+e^{-as})}$

4. (a) $\sin t + [1 - \cos(t-3)]u(t-3)$

(b) $t + [4 - t + \sin(t-2) - 2\cos(t-2)]u(t-2)$

5. (a) $e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t + \frac{1}{2}[1 - e^{2\pi - t}(\cos t + \sin t)]u(t-2\pi)$
$- \frac{1}{2}[1 - e^{4\pi - t}(\cos t + \sin t)]u(t-4\pi)$

(b) $e^{-t} + e^{-2t} + \frac{1}{2}[e^{-3t} - 2e^{-2(t+1)} + e^{-(t+4)}]u(t-2)$

(c) $\cos 2t + \frac{1}{3}[1 - u(t-2\pi)]\sin t + \frac{1}{6}[8 + u(t-2\pi)]\sin 2t$

(d) $2e^{-2t} - 2e^{-3t} + [\frac{1}{36} + \frac{1}{6}(t-1) - \frac{1}{4}e^{-2(t-1)} + \frac{2}{9}e^{-3(t-1)}]u(t-1) - [\frac{13}{36} + \frac{1}{6}(t-5) - \frac{7}{4}e^{-2(t-5)} + \frac{11}{9}e^{-3(t-5)}]u(t-5)$

Konvolucija

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

$$y'' + y = g(t), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0. \quad \dots (1)$$

Ako stavimo da je $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ i $G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$, tada primjenjujući Laplaceovu transformaciju na obe strane od (1) dobijamo

$$s^2 Y(s) + Y(s) = G(s)$$

i time

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s^2+1}\right) G(s).$$

Tj. Laplaceova transformacija rješenja od (1) je proizvod Laplaceove transformacije od $\sin t$ i Laplaceove transformacije f-je $g(t)$. Ono što bi sad željeli imati je jednostavna formula za $y(t)$ po članovima od $\sin t$ i $g(t)$. Kao što integral proizvoda nije proizvod integrala, $y(t)$ nije proizvod od $\sin t$ i $g(t)$. Međutim, $y(t)$ možemo izraziti kao "konvoluciju" od $\sin t$ i $g(t)$

<u>Definicija</u> Neka su $f(t)$ i $g(t)$ po dijelovima neprekidne na intervalu $[0, \infty)$. Konvoluciju f-ja $f(t)$ i $g(t)$, označavamo sa $f * g$, i definišemo sa

$$(f*g)(t) := \int_0^t f(t-v)g(v)\,dv$$

(#) Izračunati konvoluciju f-ja t i t^2.

Rj.

$$t * t^2 = \int_0^t (t-v)v^2\,dv = \int_0^t (tv^2 - v^3)\,dv = \frac{t}{3}v^3\Big|_0^t - \frac{1}{4}v^4\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{12}t^4$$

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-v)\,g(v)\,dv$$

$f(t) = t, \quad g(t) = t^2$

Osobine konvolucije

Neka su $f(t)$, $g(t)$ i $h(t)$ po dijelovima neprekidne na intervalu $[0,\infty)$. Tada

(i) $f*g = g*f$,

(ii) $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$,

(iii) $(f*g)*h = f*(g*h)$,

(iv) $f*0 = 0$.

Teorem konvolucije Neka su $f(t)$ i $g(t)$ po dijelovima neprekidne na intervalu $[0,\infty)$ i eksponencijalnog reda α. Ako označimo sa $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ i $G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$ tada

$$\mathcal{L}\{f*g\}(s) = F(s)\,G(s)$$

ili ekvivalentno

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\}(t) = (f*g)(t)$$

Drugim riječima

$$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t)*g(t)$$

(#) Primjenom teoreme o konvoluciji riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y''-y=g(t)$$

tako da zadovoljava uslove

$$y(0)=1,\quad y'(0)=1$$

gdje je $g(t)$ po djelovima neprekidna na $[0,\infty)$ i eksponencijalnog reda.

Rj. $y''-y=g(t)$

Neka je $Y(s)=\mathcal{L}\{y\}(s)$ i $G(s)=\mathcal{L}\{g\}(s)$. Primjenjujući Laplasovu transformaciju na obe strane date diferencijalne jednačine i koristeći dati uslov imamo

$$s^2Y(s)-s-1-Y(s)=G(s)$$

$$(s^2-1)Y(s)=s+1+G(s)$$

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^2-1}+\frac{1}{s^2-1}G(s)=\frac{1}{s-1}+\left(\frac{1}{s^2-1}\right)G(s)$$

iz čega slijedi

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t)+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}G(s)\right\}(t)$$

$$=e^t+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}G(s)\right\}(t)$$

Iz elementarne tabele Laplaceovih transformacija znamo da

$$\mathcal{L}\{sh\, t\}(s)=\frac{1}{s^2-1}$$

iz čega slijedi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}G(s)\right\}(t)=sh\, t * g(t)$$

Prema tome

$$y(t)=e^t+\int_0^t sh(t-v)g(v)\,dv$$

je rješenje diferencijalne jednačine sa datim uslovom.

Primjenom teoreme o konvoluciji izračunati

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}.$$

Rj. Primjetimo da je

$$\frac{1}{(s^2+1)^2}=\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right).$$

Kako je $\mathcal{L}\{\sin t\}(s)=\frac{1}{s^2+1}$ prema teoremi konvolucije slijedi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t)*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t)$$

$$=\sin t*\sin t=\int_0^t \sin(t-v)\sin v\,dv=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B & \\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B & \sin(t-v)\sin v= \\ \hline \cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B & =\frac{1}{2}(\cos(t-2v)-\cos t) \\ \sin A\sin B=\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B)) & \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\cos(t-2v)}_{=\cos(2v-t)}dv-\frac{1}{2}\int_0^t\cos t\,dv=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2v-t)\Big|_0^t-\frac{1}{2}t\cos t$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin t-\sin(-t)\right)-\frac{1}{2}t\cos t=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

Riješiti integralno-diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

$$y'(t)=1-\int_0^t y(t-v)e^{-2v}dv,\quad y(0)=1.$$

Rj. Primjetimo da datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$y'(t)=1-y(t)*e^{-2t}\qquad \ldots(1)$$

Neka je $Y(s)=\mathcal{L}\{y\}(s)$. Primjenjujući Laplaceovu transformaciju na (1) (i uz pomoć teorema konvolucije) dobijamo

$$sY(s)-1=\frac{1}{s}-Y(s)\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$sY(s)+\frac{1}{s+2}Y(s)=1+\frac{1}{s}$$

$$\left(\frac{s^2+2s+1}{s+2}\right)Y(s)=\frac{s+1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{\frac{(s+1)}{s}}{\frac{(s+1)^2}{s+2}}=\frac{s+2}{s(s+1)}$$

$$Y(s)=\frac{2}{s}-\frac{1}{s+1}$$

Iz čega slijedi $y(t)=2-e^{-t}$.

(#) Napisati formulu za opšte rješenje diferencijalne jednačine sa datim uslovom

$$y''+2y'+5y=g(t), \quad y(0)=3 \quad y'(0)=-2. \qquad \dots(1)$$

Rj:

Prvo riješimo odgovarajuću diferencijalnu jednačinu čiji su inicijalni uslovi jednaki nuli.

$$y''+2y'+5y=g(t), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0. \qquad \dots(2)$$

Neka je $Y(s)=\mathcal{L}\{y\}(s)$ i $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$. Tada

$$\mathcal{L}\{y''+2y'+5y\}(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

$$s^2Y(s)-\underbrace{sy(0)}_{=0}-\underbrace{y'(0)}_{=0}+2\big(sY(s)-\underbrace{y(0)}_{=0}\big)+5Y(s)=G(s)$$

$$(s^2+2s+5)Y(s)=G(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{G(s)}=\frac{1}{s^2+2s+5}$$

F-ja $H(s)$ se naziva transfer f-ja. Njoj odgovarajuća inverzna Laplaceova transformacija $h(t):=\mathcal{L}^{-1}\{H\}(t)$ se naziva impulsno odazivna f-ja.

Odredimo inverznu Laplaceovu transformaciju od $H(s)$.

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H\}(t)=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\}(t)$$
$$=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

Sada, kako je

$$H(s)=\frac{Y(s)}{G(s)} \Rightarrow Y(s)=H(s)G(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)=h*g$$

dobijamo da je $h*g$ rješenje diferencijalne jednačine (2)

$$\left((h*g)(t)=\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-v)}\sin(2(t-v))g(v)\,dv\right).$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine (1) je oblika

$$h*g+y_k$$

gdje je y_k rješenje odgovarajuće homogene jednačine od (1)

(zato što $(h*g)(0)+y_k(0)=0+y_0=y_0$
$(h*g)'(0)+y_k'(0)=0+y_1=y_1$).

Pa odredimo opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine (3)

$$y''+2y'+5y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=-2, \qquad \dots(3)$$

Karakteristična jednačina je oblika $\lambda^2+2\lambda+5=0$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$$

$\Rightarrow$ $C_1e^{-t}\cos 2t+C_2e^{-t}\sin 2t$ je opšte rješenje od (3).

Birajući koeficijente C_1 i C_2 tako da je zadovoljen dati inicijalni uslov $y(0)=2$, $y'(0)=-2$ dobijamo $y_k(t)=2e^{-t}\cos t$

Prema tome ~~rješenje~~ formula za rješenje diferencijalne jednačine (1) je

$$(h*g)(t)+y_k(t)=\frac{1}{2}\int_0^t e^{-t+v}\sin(2t-2v)g(v)\,dv+2e^{-t}\cos 2t.$$

Zadaci za vježbu

1. Primjenom teoreme o konvoluciji rješiti diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

(a) $y'' - 2y' + y = g(t)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;

(b) $y'' + 4y' + 5y = g(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

2. Primjenom teoreme o konvoluciji odrediti inverznu Laplaceovu transformaciju datih f-ja

(a) $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$ (b) $\dfrac{14}{(s+2)(s-5)}$, (c) $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

(d) $\dfrac{s}{(s-1)(s+2)}$ (uputa: $\dfrac{s}{s-1} = 1 + \dfrac{1}{s-1}$)

3. Odrediti Laplace-ovu transformaciju f-je

$$f(t) := \int_0^t (t-v)e^{3v}\,dv$$

4. Rješiti date integralno-diferencijalne jednačine po nepoznatoj f-ji $y(t)$.

(a) $y(t) + 3\int_0^t y(v)\sin(t-v)\,dv = t$

(b) $y(t) + \int_0^t (t-v)y(v)\,dv = 1$

(c) $y(t) + \int_0^t (t-v)^2 y(v)\,dv = t^3 + 3$

(d) $y'(t) + y(t) - \int_0^t y(v)\sin(t-v)\,dv = -\sin t$, $y(0) = 1$

5. Napisati formulu za rješenje diferencijalne jednačine sa datim uslovom

(a) $y'' + 9y = g(t)$, $y(0) = 2$; $y'(0) = -3$;

(b) $y'' - y' - 6y = g(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$;

(c) $y'' - 2y' + 5y = g(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Odgovori:

1. (a) $2te^t - e^t + \int_0^t e^{t-v}(t-v)g(v)\,dv$ (b) $\int_0^t g(v)e^{2v-2t}\sin(t-v)\,dv + e^{-2t}\cos t + 3e^{-2t}\sin t$

2. (a) $1 - \cos t$ (b) $2e^{5t} - 2e^{-2t}$ (c) $\frac{t}{2}\sin t$

(d) $\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}$

3. $s^{-2}(s-3)^{-1}$

4. (a) $\frac{t}{4} + \frac{3}{8}\sin 2t$ (b) $\cos t$ (c) 3

(d) $e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}$

5. (a) $H(s) = (s^2+9)^{-1}$, $h(t) = \frac{1}{3}\sin 3t$, $y_h(t) = 2\cos 3t - \sin 3t$

$y(t) = \frac{1}{3}\int_0^t [\sin 3(t-v)]g(v)\,dv + 2\cos 3t - \sin 3t$

(b) $H(s) = (s^2 - s - 6)^{-1}$, $h(t) = (e^{3t} - e^{-2t})/5$, $y_h(t) = 2e^{3t} - e^{-2t}$

$y(t) = \frac{1}{5}\int_0^t [e^{3(t-v)} - e^{-2(t-v)}]g(v)\,dv + 2e^{3t} - e^{-2t}$

(c) $y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{(t-v)}[\sin 2(t-v)]g(v)\,dv + e^{t}\sin 2t$

Impulsna i Dirac delta f-ja

Dirac delta f-ja $\delta(t)$ je određena sa sljedeće dvije osobine

(1) $$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

i

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$$

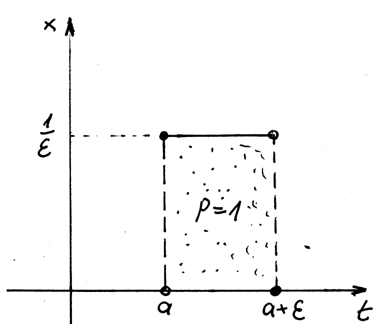
za bilo koju f-ju $f(t)$ koja je neprekidna na otvorenom intervalu koji sadrži $t=0$.

Laplaceova transformacija Dirac delta f-je:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as}$$

Ispostavi se da je Dirac delta f-ja izvod jedinične stepene f-je:

$$\delta(t-a) = u'(t-a)$$

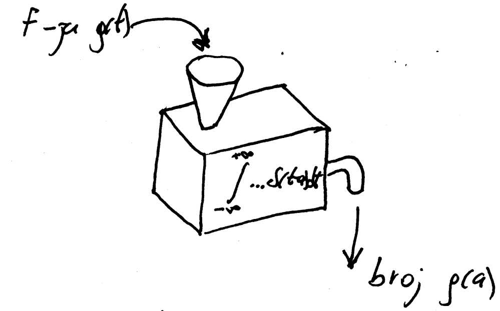


graf impulsne f-je

$$d_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & a \leq t < a+\varepsilon \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} d_{a,\varepsilon}(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)$$



dijagram koji ilustruje na koji način delta f-ja "izvlači" vrijednost g(a)

Riješiti diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=3\delta(t-\pi), \quad x(0)=1, \quad \frac{dx}{dt}(0)=0.$$

Rj. Neka je $X(s)=\mathcal{L}\{x\}(s)$. Kako je

$$\mathcal{L}\{x''\}(s)=s^2X(s)-s \quad i \quad \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}(s)=e^{-\pi s}$$

primjenjujući Laplaceovu transformaciju na obe strane date diferencijalne jednačine povlači

$$s^2X(s)-s+9X(s)=3e^{-\pi s}$$

$$(s^2+9)X(s)=s+3e^{-\pi s}$$

$$X(s)=\frac{s}{s^2+9}+e^{-\pi s}\frac{3}{s^2+9}$$

$$=\mathcal{L}\{\cos 3t\}(s)+e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s)$$

Koristeći osobinu translacije po t

$$\underline{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t)=f(t-a)\,u(t-a)}$$

da bi odredili inverznu Laplace-ovu transformaciju od $X(s)$, imamo

$$x(t)=\cos 3t+[\sin 3(t-\pi)]u(t-\pi)=\begin{cases}\cos 3t, & t-\pi<0\\ \cos 3t-\sin 3t, & t-\pi>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\cos 3t, & t<\pi\\ \sqrt{2}\cos(3t+\frac{\pi}{4}), & \pi<t\end{cases}$$

Riješiti diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

$$x''+4x=8\delta(t-2\pi), \quad x(0)=3, \quad x'(0)=0.$$

Rj. Primjenjujući Laplaceovu transformaciju na datu diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$s^2X(s)-3s+4X(s)=8e^{-2\pi s}$$

$$(s^2+4)X(s)=3s+8e^{-2\pi s}$$

$$X(s)=\frac{3s}{s^2+4}+\frac{8}{s^2+4}e^{-2\pi s}$$

Koristeći osobinu translacije po t

$$x(t)=3\cos 2t+4u(t-2\pi)\sin 2(t-2\pi)=\begin{cases}3\cos 2t, & t-2\pi<0\\ 3\cos 2t+4\sin 2t, & t-2\pi>0\end{cases}$$

$$\sin(2t-4\pi)=\sin 2t\cos 4\pi-\sin 4\pi\cos 2t=\sin 2t$$

Prema tome

$$x(t)=\begin{cases}3\cos 2t, & t<2\pi\\ 3\cos 2t+4\sin 2t, & t>2\pi\end{cases}.$$

Zadaci za vježbu

1. Izračunati date integrale

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2-1)\delta(t)dt$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 3t \, \delta(t-\frac{\pi}{2}) dt$

(c) $\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\delta(t-1) dt$

2. Odrediti Laplaceovu transformaciju datih f-ja

(a) $\delta(t-1)-\delta(t-3)$ (b) $t\,\delta(t-1)$ (c) $\delta(t-\pi)\sin t$

3. Riješiti diferencijalne jednačine sa datim uslovom

(a) $w''+w=\delta(t-\pi)$, $w(0)=0$, $w'(0)=0$;

(b) $y''+2y'-3y=\delta(t-1)-\delta(t-2)$, $y(0)=2$, $y'(0)=-2$;

(c) $y''-y=4\delta(t-2)+t^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$;

(d) $w''+6w'+5w=e^t\delta(t-1)$, $w(0)=0$, $w'(0)=4$;

(e) $y''+y=\delta(t-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

(f) $y''+y=-\delta(t-\pi)+\delta(t-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Odgovori

1. (a) -1 (b) -1 (c) e^{-2}

2. (a) $e^{-s}-e^{-3s}$ (b) e^{-s} (c) 0

3. (a) $-(\sin t)u(t-\pi)$

(b) $e^t+e^{-3t}+\frac{1}{4}(e^{t-1}-e^{3-3t})u(t-1)-\frac{1}{4}(e^{t-2}-e^{6-3t})u(t-2)$

(c) $2(e^{t-2}-e^{-(t-2)})u(t-2)+2e^t-t^2-2$

(d) $e^{-t}-e^{-5t}+\frac{e}{4}(e^{1-t}-e^{5-5t})u(t-1)$

(e) $\sin t+(\sin t)u(t-2\pi)$

(f) $\sin t+(\sin t)u(t-\pi)+(\sin t)u(t-2\pi)$

Primjena Laplaceove transformacije pri rješavanju sistema diferencijalnih jednačina

Laplaceovu transformaciju možemo koristiti da svedemo određeni sistem diferencijalnih jednačina sa datim uslovom na sistem linearnih algebarskih jednačina, gdje su nepoznate u stvari transformacije f-ja koje daju rješenje. Rješavajući po ovim nepoznatim i primjenjujući inverznu Laplaceovu transformaciju, možemo dobiti rješenje diferencijalnog sistema sa datim uslovom.

(#) Rješiti sistem diferencijalnih jednačina sa datim uslovom

$$x'(t) - 2y(t) = 4t\,; \qquad x(0) = 4,$$

$$y'(t) + 2y(t) - 4x(t) = -4t - 2\,; \qquad y(0) = -5.$$

Rj. Primjenjujući Laplace-ovu transformaciju na obe strane diferencijalne jednačine dobijamo

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) - 2\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{4}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) - 4\mathcal{L}\{x\}(s) = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \qquad \ldots(2)$$

Neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$; $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. Tada

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) = sX(s) - x(0) = sX(s) - 4$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) + 5$$

Zamjenjujući ove izraze u sistem (2) dobijamo

$$sX(s) - 2Y(s) = \frac{4s^2+4}{s^2} \qquad \ldots(I)$$

$$-4X(s) + (s+2)Y(s) = -\frac{5s^2+2s+4}{s^2} \qquad \ldots(II) \qquad \ldots(3)$$

Da bi se rješili $Y(s)$ iz sistema prvu jednačinu ćemo pomnožiti sa $(s+2)$, drugu sa 2 i sabrati ih:

$$(s+2)\cdot(I) + 2\cdot(II): \quad [s(s+2) - 8]X(s) = \frac{(s+2)(4s^2+4)}{s^2} - \frac{10s^2+4s+8}{s^2}$$

Ovo se može pojednostaviti i dobiti

$$X(s) = \frac{4s-2}{(s+4)(s-2)}$$

Da bi izračunali inverznu transformaciju, napišimo $X(s)$ kao zbir parcijalnih razlomaka

$$X(s) = \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s-2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}$$

Da bi odredili $y(t)$, možemo riješiti sistem (3) za $Y(s)$ i onda izračunati inverznu Laplaceovu transformaciju. Međutim, puno je lakše riješiti prvu jednačinu datog sistema za $y(t)$ po članovima od $x(t)$. Time

$$y(t) = \frac{1}{2}x'(t) - 2t$$

Zamjenjujući dobijeni $x(t)$ dobijamo

$$y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t$$

Rješenje sistema diferencijalnih jednačina sa datim uslovom je

$$\begin{cases} x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t} \\ y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t \end{cases}$$

\# Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$2x'' = -6x + 2y$$
$$y'' = 2x - 2y + 40\sin 3t$$

uz dati početni uslov

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$$

Rj. Neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$; $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

S obzirom da je

$$\mathcal{L}\{x''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s\,x(0) - x'(0) = s^2 X(s)$$
$$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2 Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s) = \frac{3}{s^2+3^2}$$

kada primjenimo Laplaceovu transformaciju na dati sistem dobićemo

$$2s^2X(s) = -6X(s) + 2Y(s) \quad /:2$$
$$s^2Y(s) = 2X(s) - 2Y(s) + \frac{120}{s^2+9}$$

$$(s^2+3)X(s) - Y(s) = 0$$
$$-2X(s) + (s^2+2)Y(s) = \frac{120}{s^2+9}$$

Sistem možemo riješiti npr. Cramerovim pravilom

$$D = \begin{vmatrix} s^2+3 & -1 \\ -2 & s^2+2 \end{vmatrix} = (s^2+3)(s^2+2) - 2 = s^4 + 5s^2 + 4 = (s^2+1)(s^2+4)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{120}{s^2+9} & s^2+2 \end{vmatrix} = \frac{120}{s^2+9} \; ; \qquad D_Y = \begin{vmatrix} s^2+3 & 0 \\ -2 & \frac{120}{s^2+9} \end{vmatrix} = \frac{120(s^2+3)}{s^2+9}$$

$$X(s) = \frac{D_x}{D} = \frac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$Y(s) = \frac{D_Y}{D} = \frac{120(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$

Rastavimo $X(s)$ i $Y(s)$ na zbir razlomaka

$$\frac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+4} + \frac{C}{s^2+9} \qquad / (s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)$$

$$120 = A(s^2+4)(s^2+9) + B(s^2+1)(s^2+9) + C(s^2+1)(s^2+4)$$

Stavljajući $s^2=-1$ (tj. $s=i$) imamo $s^2+1=0 \Rightarrow A = \frac{120}{3\cdot 8} = 5$

za $s^2=-4 \Rightarrow 120 = B\cdot(-3)\cdot 5 \Rightarrow B=-8$

za $s^2=-9 \Rightarrow C=3$

$$X(s) = \frac{5}{s^2+1} - \frac{8}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+9}$$

za vježbu isto ponoviti za $Y(s)$, $\quad Y(s) = \frac{10}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{18}{s^2+9}$

Primjenjujući inverznu Laplaceovu transformaciju na $X(s)$ i $Y(s)$ dobijamo

$$x(t) = 5\sin t - 4\sin 2t + \sin 3t$$

$$y(t) = 10\sin t + 4\sin 2t - 6\sin 3t$$

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$x' - 2x - 4y = \cos t; \qquad x(0)=0,$$
$$y' + x + 2y = \sin t; \qquad y(0)=0.$$

Rj.: Neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$ i $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. Kako je

$$\mathcal{L}\{x'\} = sX(s) - x(0) = sX(s)$$
$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

to imamo

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) - 2\mathcal{L}\{x\}(s) - 4\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{\cos t\}(s)$$
$$\mathcal{L}\{y'\}(s) - \mathcal{L}\{x\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s)$$

$$sX(s) - 2X(s) - 4Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$
$$sY(s) + X(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s-2)X(s) - 4Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$
$$X(s) + (s+2)Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$D = \begin{vmatrix} s-2 & -4 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2-4+4 = s^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \frac{s}{s^2+1} & -4 \\ \frac{1}{s^2+1} & s+2 \end{vmatrix} = \frac{s^2+4s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+1} = \frac{s^2+2s+4}{s^2+1}$$

$$D_Y=\begin{vmatrix} s-2 & \dfrac{s}{s^2+1} \\ 1 & \dfrac{1}{s^2+1}\end{vmatrix}=\frac{s-2}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+1}=-\frac{2}{s^2+1}$$

$$X(s)=\frac{D_x}{D}=\frac{\frac{s^2+2s+4}{s^2+1}}{s^2}=\frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}$$

$$Y(s)=\frac{D_Y}{D}=\frac{-\frac{2}{s^2+1}}{s^2}=-\frac{2}{s^2(s^2+1)}$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}\right\}(t)$$

$$\frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}=\ldots=\frac{2}{s}+\frac{4}{s^2}-2\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow\quad x(t)=2+4t-2\cos t-3\sin t$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s^2(s^2+1)}\right\}=-2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}(t)$$

$$=-2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\right\}(t)=-2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t)+2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$=-2t+2\sin t$$

Rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t)=2+4t-2\cos t-3\sin t \\ y(t)=-2t+2\sin t\end{cases}$$

Zadaci za vježbu

(1.) Primjenom metode Laplasove transformacije riješiti diferencijalne jednačine sa datim uslovom. Ovdje $x', y', \ldots$ označava izvod po promjenljivoj t; istu oznaku ima i simbol D.

(a) $x'=3x-2y$; $\quad y'=3y-2x$; $\quad x(0)=1,\ y(0)=1$

(b) $z'+w'=z-w$; $\quad z'-w'=z-w$; $\quad z(0)=1,\ w(0)=0$

(c) $x'=y+\sin t$; $\quad y'=x+2\cos t$; $\quad x(0)=2,\ y(0)=0$

(d) $(D-4)[x]+6y=9e^{-3t}$; $\quad x-(D-1)[y]=5e^{-3t}$; $\quad x(0)=-9,\ y(0)=4$

(e) $x''+2y'=-x$; $\quad -3x''+2y''=3x-4y$; $\quad x(0)=2,\ x'(0)=-7,\ y(0)=4,\ y'(0)=-9$

(f) $x'+y=1-u(t-2)$; $\quad x+y'=0$; $\quad x(0)=0,\ y(0)=0$

(g) $x'-y'=(\sin t)\,u(t-\pi)$; $\quad x+y'=0$; $\quad x(0)=1,\ y(0)=1$

(h) $x'-2y=2$; $\quad x'+x-y'=t^2+2t-1$; $\quad x(1)=1,\ y(1)=0$

(i) $x'+x-y'=2(t-2)e^{t-2}$; $\quad x''-x'-2y=-e^{t-2}$; $\quad x(2)=0,\ x'(2)=1,\ y(2)=1$.

(j) $x'=3x+y-2z$; $\quad y'=-x+2y+z$; $\quad z'=4x+y-3z$; $\quad x(0)=-6,\ y(0)=2,\ z(0)=-12$.

Odgovori:

1b (a) $x = e^t$; $y = e^t$.

(b) $z = e^t$; $w \equiv 0$

(c) $x = \frac{7}{4}e^t + \frac{7}{4}e^{-t} - \frac{3}{2}\cos t$; $y = \frac{7}{4}e^t - \frac{7}{4}e^{t} + \frac{1}{2}\sin t$

(d) $x = -\frac{150}{17} e^{\frac{5t}{2}} \cos\frac{\sqrt{15}t}{2} - \frac{334\sqrt{15}}{85} e^{\frac{5t}{2}} \sin\frac{\sqrt{15}t}{2} - \frac{3}{17}e^{-3t}$;

$y = \frac{46}{17} e^{\frac{5t}{2}} \cos\frac{\sqrt{15}t}{2} - \frac{146\sqrt{15}}{85} e^{\frac{5t}{2}} \sin\frac{\sqrt{15}t}{2} + \frac{22}{17}e^{-3t}$.

(e) $x = 4e^{-2t} - e^{-t} - \cos t$; $y = 5e^{-2t} - e^{-t}$

(f)

$x = \frac{(e^t - e^{-t})}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{t-2} - e^{-(t-2)}\right]u(t-2)$;

$y = 1 - \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \left[1 - \frac{e^{t-2} + e^{-(t-2)}}{2}\right]u(t-2)$

(g)

$x = e^{-t} - \frac{1}{2}\left[e^{-(t-\pi)} + \cos t - \sin t\right]u(t-\pi)$

$y = e^{-t} + \left[1 - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right]u(t-\pi)$

(h) $x = t^2$; $y = t - 1$

(i) $x = (t-2)e^{t-2}$; $y = e^{t-2}$

(j) $x = -7e^{-t} + e^t$; $y = 2e^{-t}$; $z = -13e^{-t} + e^t$

Uvod u statistiku

Uvod. Priroda statistike. Prikupljanje podataka. Populacija i uzorci. Kratka historija statistike.

Statistika je umjetnost učenja iz podataka. Ona se bavi proučavanjem načina prikupljanja podataka, njihovih pratećih opisa i njihovom analizom, koja često vodi do izvođenja nekog zaključka.

Dio statistike koja se bavi opisom i sumiranjem podataka se naziva deskriptivna statistika.

Dio statistike koja je skoncentrisana na izvođenju zaključaka iz dobijenih podataka se naziva inferencijalna statistika.

Ukupna familija svih elemenata za čije informacije smo zainteresovani se naziva populacija. Podgrupu populacije koju ćemo detaljno prostudirati se naziva uzorak

Za uzorak od k članova populacije kažemo da je slučajan uzorak, a ako su ti članovi izabrani na takav način da su sve vjerovatnoće izbora svih k članova jednake, tada uzorak nazivamo jednostavan slučajan uzorak.

\# Da li je bolje upisati dijete u osnovnu školu mlađe ili starije dobi? Ovo je sigurno pitanje koje zanima mnoge roditelje kao i ljude koji su odgovorni za postavljanje društvenih pravila. Obrazložiti kako odgovoriti na ovo pitanje.

Rj

- Posmatrati svoje iskustvo?
- Pričati sa prijateljima o njihovim iskustvima?
  - ni jedno ni drugo nije objektivno
  - treba nam puno veća grupa

- Testirati znanje djece na kraju prvog razreda?
  - starije dijete je najvjerovatnije "pokupilo" malo više znanja kod kuće od mlađeg djeteta u periodu kad nije išlo u školu i zbog toga bi trebalo pokazati bolje rezultate na testu

- Analizirati ukupan broj godina provedenih u školi?
  - mnogi autori tvrde da je ukupan broj godina provedenih u školi do njenog završetka daleko bolja mjera za odgovor na pitanje kada dijete treba upisati u školu.

- Analizirati njihov opšti uspjeh tokom školovanja?

U svim slučajevima moramo prikupiti odgovarajuće informacije, ili podatke, i onda se ti podaci moraju opisati i analizirati.

Kada je najbolje dijete upisati u školu - kada je mlađe ili kada je starije? Kako odgovoriti na ovo pitanje? Data je tabela

Tabela 1 - Ukupan broj godina provedenih u školi u odnosu na starost upisa

Godina	Mlađa polovina djece		Starija polovina djece	
	Prosječan broj godina u trenutku upisa u školu	Prosječan broj godina provedenih do završetka škole	Prosječan broj godina u trenutku upisa u školu	Prosječan broj godina provedenih do završetka
1956	6,38	13,84	6,62	13,67
1957	6,34	13,80	6,59	13,86
1958	6,31	13,78	6,56	13,79
1959	6,29	13,77	6,54	13,78
1960	6,24	13,68	6,53	13,68
1961	6,18	13,63	6,45	13,65
1962	6,08	13,49	6,37	13,53

(a) U kojoj godini se desila najveća razlika prosječnog broja godina provedenih u školi do njenog završetka između mlađih i starijih prvačića?

(b) Da li je broj godina provedenih u školi do završetka u prosjeku veći kod mlađe startne grupe ili starije?

Rj.

1956: $|13,84-13,67| = 0,17$

1957: $|13,80-13,86| = 0,06$

1958: $|13,78-13,79| = 0,01$

1959: $|13,77-13,78| = 0,01$

1960: $|13,68-13,68| = 0$

1961: $|13,63-13,65| = 0,02$

1962: $|13,49-13,53| = 0,04$

(a) Najveća razlika se desila 1956.

(b) Starija startna grupa je sljedeće godine provela više u školi u prosjeku od mlađe 1957, 1958, 1959, 1961, 1962

Postoji veći broj godina (u kojoj prosječan broj godina provedenih do završetka škole) kod starije startne grupe.

Ako želimo naučiti nešto o nečemu, prvo moramo sakupiti odgovarajuće podatke. Navesti nekoliko primjera problema za čije rješenje nam treba sakupljanje odgovarajućih podataka.

Rj.

1. Trenutno stanje ekonomije
2. Procent javnog mijenja o podršku određenog prijedloga
3. Prosječna potrošnja po kilometru novog automobila
4. Efikasnost novog lijeka
5. Korisnost novog načina učenja čitanja kod djece u osnovnoj školi

(#) Sljedeći podaci prikazuju procente odraslih osoba iz BiH, podijeljeni po edukaciskim nivoima, koji su konzumirali cigarete u godinama od 1999 do 2002.

Tabela 2 – Konzumiranje cigareta u BiH (% od svih odraslih osoba)

	1999	2000	2001	2002
Ukupno	25,8	24,9	24,9	26,0
Spol				
Muškarac	28,3	26,9	27,1	28,7
Žena	23,4	23,1	23,0	23,4
Edukacija				
Nezavršena srednja škola	39,9	32,4	33,8	35,2
Srednja škola	36,4	31,1	32,1	32,3
Viša srednja	32,5	27,7	26,7	29,0
Fakultet	18,2	13,9	13,8	14,5

(a) Za koju grupu postoji lagano opadanje?
(b) Možete li reći da li postoji cjelokupan trend?

Rj.

(a) Ako posmatramo godine od 1999 do 2002 ni za jednu grupu ne možemo reći da postoji lagano opadanje. Najbliže tom cilju bi bile žene.

(b) Možemo reći da postoji cjelokupan trend. U svim slučajevima pušača je 2002 bilo mnogo više nego 2001, a u većini slučajeva se vidi opadanje u periodu od 1999 do 2001.

(#) Statistika se često koristi za dizajniranje odgovarajućeg eksperimenta za prikupljanje podataka. Obrazložiti ovo na primjeru – Na koji način testirati efikasnost novog lijeka o smanjivanju holesterola?

Rj.

- Regrutovati volontere za testiranje.
- Periodično im davati lijek i mjeriti holesterol
- Da li davati lijek svim volonterima?
  - placebo efekat
  - vrijeme neobično toplo (ili hladno) što kao rezultat može imati da pacijenti provode više (ili manje) vremena napolju
  - ...
- Podijeliti volontere u dvije grupe?
  - jednoj grupi davati lijek, drugoj placebo
  - medicinsko osoblje koje mjeri holesterol ne bi smjeli znati podjelu grupa
- Podijeliti volontere na slučajan način ili planirano?

Grupa koja neprima nikakav tretman se naziva <u>kontrolna</u> grupa.

Bacanjem novčića 10 puta, glava je se pojavila 7 puta. Bacanjem nekog drugog novčića 50 puta, glava se pojavila 47 puta. Šta možemo reći o ova dva novčića i kako napraviti vezu između ovog eksperimenta i statističkih podataka.

Rj.

Da bi izveli logičan zaključak iz podataka, veoma je bitno da napravimo neke pretpostavke o šansi (ili vjerovatnoći) njihovog pojavljivanja. Ukupan zbir svih mogućih ovakvih pretpostavki u statistici je poznato pod imenom <u>modeli vjerovatnoće</u> za podatke.

Prvi novčić je najvjerovatnije običan novčić, kod koga se nekom šansom od 10 bacanja glava pojavila 7 puta.

Drugi novčić nije običan novčić.

U statistici, zanimaju nas određene informacije o familiji elemenata, koju nazivamo populacija. Populacija je obično previše velika da bi se mogao ispitati svaki njegov član. Pretpostavimo da nas zanima prosječan broj godina ljudi u gradu u kojem živimo. Obrazložiti da li taj odgovor možemo dobiti anketirajući prvih 100 ljudi koji uđu u gradsku biblioteku?

Rj.

Podgrupu populacije koju u detalje proučavamo nazivamo <u>uzorak</u>. Da bi uzorak davao odgovarajuće informacije o ukupnoj populaciji, mora na neki način reprezentovati tu populaciju.

Anketirajući prvih 100 ljudi koji uđu u gradsku biblioteku ne možemo dobiti odgovor na postavljeno pitanje – sigurno možemo tvrditi da izabrani uzorak u ovom slučaju ne predstavlja čitavu populaciju! (da li su svi ljudi učlanjeni u biblioteku? ko posjećuje biblioteku? studenti i penzioneri, učenici srednjih škola)

Reprezentacija u ovom smislu predstavlja uzorak koji je izabran na takav način da su svi dijelovi populacije na jednak način uključeni u uzorak.

(#) Jedna srednja škola broji 300 učenika u prvom razredu, 500 u drugom razredu i po 600 učenika u trećem i četvrtom razredu. Pretpostavimo da želimo ispitati mišljene učenika da li odlazak u vojsku mora biti obaveza ili ne, i želimo napraviti uzorak od 100 učenika. Obrazložiti kakav bi izbor za uzorak bio idealan?

Rj.

1 razred = 300
2 razred = 500
3 razred = 600
4 razred = 600

Ukupno učenika: 2000.

U ovom slučaju naivan izbor za uzorak bi bio da nasumice izaberemo 100 osoba i sprovedemo anketu među njima. Puno bolji izbor za uzorak bi bio da prvo izračunamo koliko osoba da izaberemo iz svakog razreda. Kako su proporcije učenika

1 god. $\frac{300}{2000} = 0,15$ 2 god $\frac{500}{2000} = 0,25$

3 god $\frac{600}{2000} = 0,30$ 4 god $\frac{600}{2000} = 0,30$

ovo nam nameće da iz prvog razreda uzmemo 15, iz drugog 25, iz trećeg 30 i iz četvrtog 30 osoba. Tek onda da izaberemo na slučajan način učenike.

(#) Medicinski istraživač, pokušavajući da ustanovi efikasnost novog lijeka, je počeo testirati lijek zajedno sa plecebom. (u ovom smislu riječ plecebo predstavlja lijek koji nema nikakva svojstva). Da bi bio siguran da su dvije grupe volontera pacijenata, oni koji će dobiti lijek i oni koji će dobiti plecebo, što je moguće više slične, istraživač je odlučio da se ne pouzda u slučajnost nego da pažljivo pregleda volontere i onda sam formira grupe. Da li je ovaj pristup preporučljiv? Zašto ili zašto nije?

Rj.

Ovaj pristup nije preporučljiv. Istraživač koji pokušava da nauči o efikasnosti novog lijeka nebi trebao znati koji pacijenti primaju novi lijek a koji primaju placebo – u suprotnom, istraživač koji ima takvo znanje će tim znanjem biti "opterećen" i tokom istraživanja kao i u analizi dobijenih podataka će nesvjesno praviti dodatna zapažanja o efikasnosti novog lijeka.

\# Sljedeće sedmice će se održati izbori, i uzimajući uzorak iz glasačke populacije mi želimo predvidjeti koja će stranka pobijediti. Koja od sljedećih metoda za izbor će proizvesti reprezentativan uzorak?

(a) Anketiranje svih ljudi glasačke dobi koji posjećuju ženske košarkaške utakmice.

(b) Anketiranje svih ljudi glasačke dobi koji napuštaju luksuzni gradski restoran.

(c) Dobiti kopiju registraciske liste glasača, na slučajan način izabrati 100 imena, i sprovesti anketu.

(d) Iskoristiti rezultat televizijskog telefon programa, u kojem voditelj traži od gledalaca da ga nazovu i saopšte mu svoj izbor.

(e) Iskoristiti imena iz telefonskog imenika i anketirati te ljude.

Rj.

(a) uzorak nije reprezentativan (ZAŠTO?)

(b) Uzorak nije reprezentativan (ZAŠTO?)

(c) Uzorak je reprezentativan i može se čak poboljšati (KAKO?)

(d) Uzorak nije reprezentativan.

(e) Uzorak je reprezentativan u zavisnosti koji telefonski imenik posmatramo – (a) imenik fiksnih telefona
(b) imenik mobilnih telefona

\# Univerzitet planira da štampa izvještaj o svojim diplomiranim studentima u kome će staviti informacije o njihovim godišnjim platama. Na slučajan način su izabrali 200 nedavnih diplomanata i poslali im upitnike koji su prilagođeni njihovim trenutnim poslovima. Međutim, od njih 200, samo je 86 upitnika vraćeno. Pretpostavimo da je izvještaj o prosječnim platama 75000 KM.

(a) Hoće li Univerzitet pogriješiti u mišljenju ako zaključi da je 75000 KM prosječna plata diplomiranih studenata? Obrazložiti razlog koji se nalazi iza vašeg odgovora.

(b) Ako je vaš odgovor pod (a) pozitivan, možete li smisliti neki skup uslova koji su povezani sa grupom koja je vratila popunjene upitnike iz kojih bi se složili da je 75000 KM dobra aproksimacija?

Rj.

(a) Da, Univerzitet će pogriješiti u mišljenju. Diplomanti koji su vratili upitnike ne moraju reprezentovati ukupnu populaciju diplomiranih studenata.

(b) Ako je broj upitnika koji su vraćeni približno jednako 200 (200 upitnika je poslano) tada bi aproksimacija bila puno bolja.

(#) 1662 Engleski trgovac John Graunt je izdao knjigu pod naslovom "Prirodna i politička opažanja napravljena na osnovu smrtovnica". Sljedeća tabela prikazuje ukupan broj smrti u Engleskoj i broj smrti koju je izazvala kuga za pet različitih godina kuge, i ta tabela je uzeta iz ove knjige

Godina	Broj pokopa	Broj smrti od kuge
1592	25 886	11 503
1593	17 844	10 662
1603	37 294	30 561
1625	51 758	35 417
1636	23 359	10 400

Graunt je koristio Londonske smrtovnice za procjenu populacije grada. Npr. da bi ustanovio populaciju Londona 1660, Graunt je posmatrao domaćinstva u određenim općinama Londona i ustanovio da, u prosjeku, postoje približno 3 smrti za svakih 88 ljudi. Dijeleći ovo sa 3. dolazimo do zaključka da, u prosjeku, postoji 1 smrt za svakih $\frac{88}{3}$ čovjeka. Kako su Londonske smrtovnice pokazivale 13 200 smrti u Londonu te godine, Graunt je procjenio da je populacija Londona oko $13\,200 \cdot \frac{88}{3} = 387\,200$.

Kritikovati Graunt-ovu metodu za procjenu populacije Londona. Koju implicitnu pretpostavku je on napravio?

Rj. Graunt-ova implicitna pretpostavka je ta da općine koje je on posmatrao čine dobru reprezentaciju ukupne populacije Londona.

Ključni ~~termini~~ pojmovi iz ove lekcije:

Statistika – umjetnost učenja iz podataka.

Deskriptivna statistika – dio statistike koja se bavi opisom i sumiranjem podataka

Inferencijalna statistika – dio statistike koja se bavi izvođenjem zaključaka iz dobijenih podataka

Modeli vjerovatnoće – matematičke pretpostavke koje se odnose na mogućnost pojavljivanja različite vrijednosti podataka

Populacija – familija elemenata koji nas zanimaju

Uzorak – podgrupa populacije koja će biti studirana

Slučajan uzorak veličine k – uzorak izabran na takav način da sve podgrupe veličine k imaju istu vjerovatnoću da budu izabrane

Slojevit slučajan uzorak – uzorak dobijen djeljenjem populacije na različite podpopulacije i onda uzimanje slučajnog uzorka iz svake podpopulacije.

Zadaci za vježbu

1. Neki istraživač pokušava da ustanovi koliki broj godina u prosjeku danas ljudi dožive u BiH. Da bi dobio ovaj podatak, istraživač 30 dana čita čitulje (smrtovnice) iz Dnevnog avaza, i bilježi godinu smrti ljudi iz BiH. Obrazložiti da li će ovakav pristup dovesti do reprezentativnog uzorka?

2. Ako je u Zadatku 1 (u prethodnom zadatku) dobijen odgovor da je prosječan broj godina umrle osobe danas u BiH 82,4 godine, kakav zaključak možemo izvesti iz ovoga.

3. Da bi odredili postotak ljudi u vašem gradu koji konzumiraju cigarete, odlučili ste anketirati ljude sa jedne od sljedećih lokacija
(a) bilijar sala;
(b) kuglane;
(c) tržnog centra;
(d) biblioteke.)
Koje od ovih potencijalnih mjesta za anketiranje će najvjerovatnije kao rezultat imati realnu aproksimaciju željenog postotka? Zašto?

4. U novinama je izašao članak iz ministarstva saobraćaja, o sadržaju oblačenja pješaka koji su poginuli u saobraćajnim nesrećama koje su se odvijale u noćnim

satima, gdje stoji da je 80% žrtvi nosilo crno obojenu odjeću a da je 20% nosilo svijetlo obojenu odjeću. Na kraju članka je izveden zaključak da je ~~siguri~~ nota sigurnije nositi svijetlo-obojenu odjeću.
(a) Da li je ovaj zaključak opravdan? Objasniti.
(b) Ako je vaš odgovor pod (a) ne, koje dodatne informacije nam trebaju prije izvođenja konačnog zaključka.

5. Londonske smrtnice pokazuju da se desilo 12 246 smrtnih slučajeva 1658. Pretpostavljajući da je istraživanje Londonskih opština pokazalo približno 2 procenta populacijske smrti te godine, iskoristiti Graunt-ovu metodu za procjenu londonske populacije 1658. (Graunt-ova metoda je opisana u tekstu jednog od ranije urađenih zadataka).

6. Pretpostavimo da ste prodavač osiguranja u 1662 godini, kada je štampana Graunt-ova knjiga. Objasniti na koji način bi mogli iskoristiti njegove podatke o godini smrti ljudi.

7. Objasniti zašto mislite da bi studiranjem statistike moglo pomoći u vašoj struci? Na koji način je mislite iskoristiti u svom daljem radu?

Opisivanje skupova podataka

Veoma je važno da se numerički pronalasci bilo kakvog istraživanja predstave jasno i precizno i da budu prikazani tako da omoguće brz uvid u esencijalni karakter podataka. Ovo je posebno potrebno kada je skup podataka ogroman, što je često i slučaj kada su u pitanju kontrolni eksperimenti. Zaista, efikasna prezentacija podataka često brzo otkriva važne osobine kao što su rang, stepen simetrije, na koji način je koncentracija raspoređena, gdje je koncentracija najgušća i slično.

Frekventne tabele i grafikoni

(#) Sljedeći podaci predstavljaju broj dana bolovanja koje su uzeli svaki od 50 radnika neke firme u zadnjih 6 sedmica:

2, 2, 0, 0, 5, 8, 3, 4, 1, 0, 0, 7, 1, 7, 1, 5, 4, 0, 4, 0, 1, 8, 8, 7, 0,
1, 7, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 0, 0, 2, 5, 1, 3, 0, 1, 0, 2, 4, 5, 0, 5, 7, 5, 1

(a) Konstruisati frekventnu tabelu za ove podatke.
(b) Koliko radnika je imalo najmanje jedan dan bolovanja?
(c) Koliko radnika je imalo između 3 i 5 dana bolovanja?
(d) Koliko radnika je imalo više od 5 dana bolovanja?
(e) Predstaviti podatke pomoću linijskog grafa.
(f) Predstaviti podatke pomoću bar grafikona.
(g) Predstaviti podatke pomoću poligona frekvencija.

Rj.

(a) S obzirom da ovi podaci sadrže samo relativno malo različitih brojeva, ili različitih vrijednosti, to najpogodniji način za prikaz podataka je u frekventnoj tabeli, koja sadrži svaku od različite vrijednosti kao i frekvenciju pojavljivanja. Sljedeća tabela je frekventna tabela datih podataka. U njoj kolona frekvencije predstavlja broj pojavljivanja svake od različite vrijednosti datog skupa podataka. Primjetimo da je suma svih frekvencija 50, ukupan broj posmatranih podataka.

Frekventna tabela podataka o bolovanju

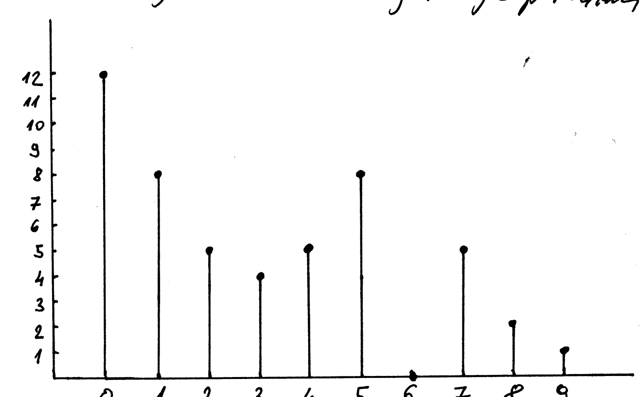
Vrijednost	Frekvencija	Vrijednost	Frekvencija
0	12	5	8
1	8	6	0
2	5	7	5
3	4	8	2
4	5	9	1

b) Kako 12 od 50 radnika nije imalo ni jedan dan bolovanja, odgovor je $50-12=38$

c) Odgovor je suma frekvencija za vrijednosti 3, 4 i 5; tj. $4+5+8=17$

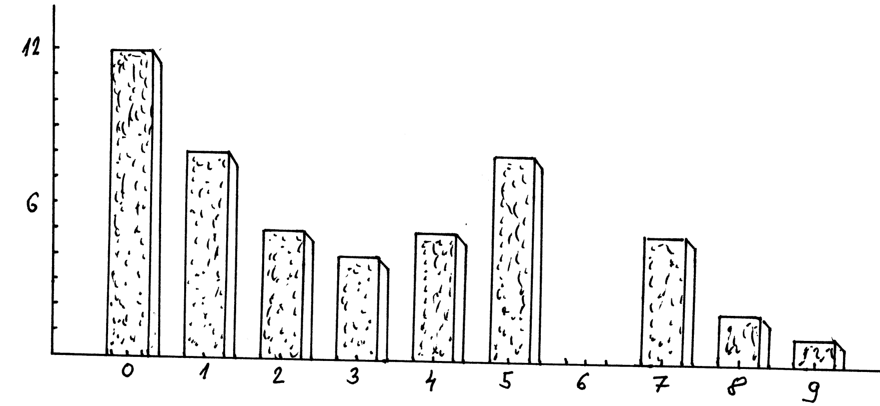
d) Odgovor je suma frekvencija za vrijednosti 6, 7, 8 i 9; tj. $0+5+2+1=8$.

e) Podaci iz frekventne tabele se mogu grafički prikazati pomoću linijskog grafa, koji prikazuje uzastopne vrijednosti na horizontalnoj osi kao i odgovarajuće frekvencije pomoću visine vertikalne linije. Linijski graf je prikazan na sljedećoj slici.



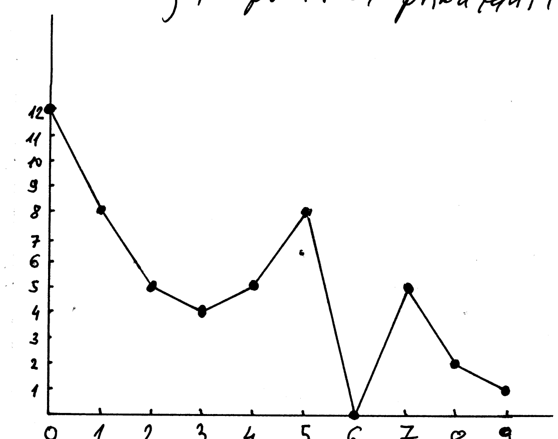
Linijski graf za broj dana uzetih za bolovanje

f) Ponekad se frekvencije ne predstavljaju pomoću linija nego pomoću pravougaonika sa nekom sjenom. Ove grafove nazivamo bar grafikon, i primjer ovog grafikona za date podatke je prikazan na slici.



Bar grafikon za broj dana bolovanja

g) Druga vrsta grafa koji se koristi za prikaz frekventne tabele je poligon frekvencija, koji prikazuje frekvencije podataka različitih vrijednosti i onda spaja nacrtane tačke pravim linijama. Sljedeća slika prikazuje poligon frekvencija podataka prikazanih u frekventnoj tabeli.



Poligon frekvencija za broj dana uzetih za bolovanje

(#) Nacrtati relativnu frekventnu tabelu za podatke iz prethodnog zadatka. Grafički prikazati ove relativne frekvencije pomoću linijskog grafa, te nacrtati poligon relativnih frekvencija.

Rj.

Frekventna tabela za broj dana uzetih za bolovanje iz prethodnog zadatka je

Vrijednost	Frekvencija	Vrijednost	Frekvencija
0	12	5	8
1	8	6	0
2	5	7	5
3	4	8	2
4	5	9	1

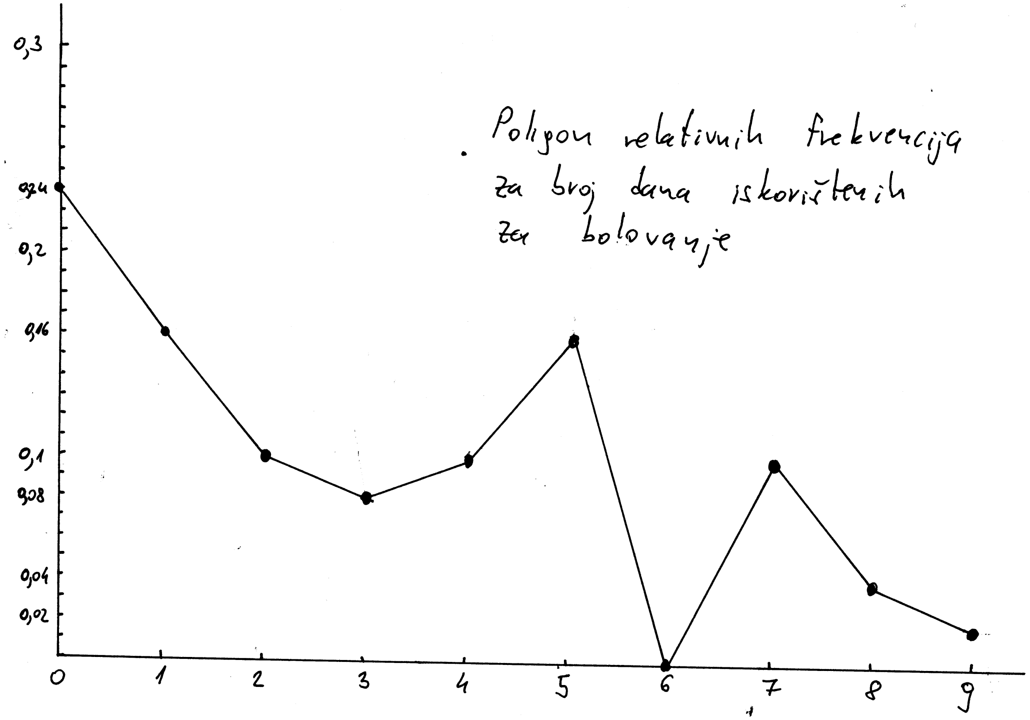
Ponekad je pogodnije razmatrati i prikazati relativne umjesto apsolutnih frekvencija vrijednosti podataka. Ako f predstavlja frekvenciju pojavljivanja nekog podatka vrijednosti x, tada relativna frekvencija $\frac{f}{n}$ se može nacrtati na mjesto x, gdje n predstavlja ukupan broj posmatranja u skupu podataka. Za podatke iz tabele iznad, imamo da je $n=50$ i odgovarajuće relativne frekvencije su date u sljedećoj tabeli. Primjetimo da, dok je suma vrijednosti iz frekventne kolone jednaka ukupnom broju posmatranja u skupu podataka, suma relativnih frekvencija u koloni je uvijek 1.

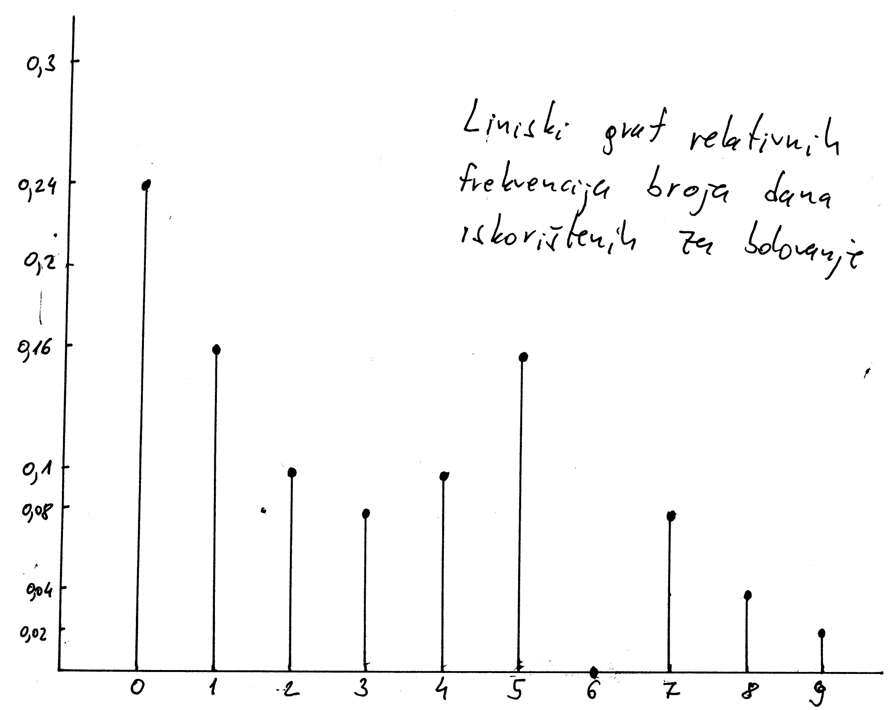
Relativne frekvencije, $n=50$, broju dana korištenih za bolovanje.

Vrijednost x	Frekvencija f	Relativna frekvencija $\frac{f}{n}$
0	12	$\frac{12}{50}=0{,}24$
1	8	$\frac{8}{50}=0{,}16$
2	5	$\frac{5}{50}=0{,}10$
3	4	$\frac{4}{50}=0{,}08$
4	5	$\frac{5}{50}=0{,}10$
5	8	$\frac{8}{50}=0{,}16$
6	0	$\frac{0}{50}=0{,}00$
7	5	$\frac{5}{50}=0{,}10$
8	2	$\frac{2}{50}=0{,}04$
9	1	$\frac{1}{50}=0{,}02$

Kako konstruisati relativnu tabelu frekvencija iz datog skupa podataka?

Poredati podatke iz skupa u rastućem poretku vrijednosti. Odrediti različite vrijednosti i broj njihovih pojavljivanja. Prikazati ove različite vrijednosti pored njihovih frekvencija f i njihovih relativnih frekvencija $\frac{f}{n}$, gdje je n ukupan broj posmatranja u skupu podataka.



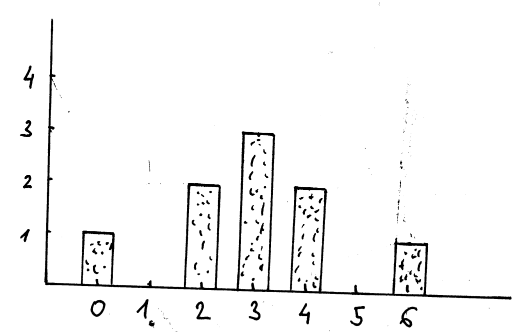


Za skup podataka kažemo da je simetričan oko vrijednosti x_0 ako su frekvencije vrijednosti $x_0 - c$ i $x_0 + c$ iste za sve c. Provjeriti da li podaci iz sljedeće tabele imaju simetriju

Vrijednost	Frekvencija	Vrijednost	Frekvencija
0	1	4	2
2	2	6	1
3	3	—	—

Rj:

Drugim riječima, podaci su simetrični oko vrijednosti x_0 ako za svaku konstantu c, postoji tačno onoliko tačaka koje su c manje od x_0, kao i onih koje su c veće od x_0. Ovo je najlakše pročitati iz grafikona, pa nacrtajmo bar grafikon za datu tabelu



Podaci dati u frekventnoj tabeli su simetrični oko vrijednosti $x_0 = 3$.

Golf Turnir Prvaka se igra svake godine u Piramida Nacionalnom Golf Klubu u Visokom, BiH. Da bi otkrili koliko bodova treba ostvariti da bi pobjedili na ovom turniru, sakupili smo sve pobjedničke rezultate od 1968 do 2004.

Godina	Pobjednik	Broj bodova	Godina	Pobjednik	Broj bodova
1968	B.G.	277	1987	P.S.	285
69	G.A.	281	88	M.M.	281
70	A.B.	279	89	M.E.	283
71	B.D.	279	90	F.B.	278
72	D.E.	286	91	N.C.	277
73	E.F.	283	92	P.M.	275
74	F.G	278	93	P.S.	277
75	G.Z.	276	94	S.M.	279
76	Z.S.	271	95	B.Dž.	274
77	S.T.	276	96	Z.Dž.	276
78	T.U.	277	97	H.S.	270
79	U.V.	280	98	B.N.	279
80	V.D.	275	99	A.T.	280
81	D.H.	280	2000	M.N.	278
82	H.P.	284	01	N.N.	272
83	P.S.	280	02	B.B.	276
84	T.S.	277	03	M.M.	281
85	T.T.	282	2004	P.S.	279
1986	T.E	279			

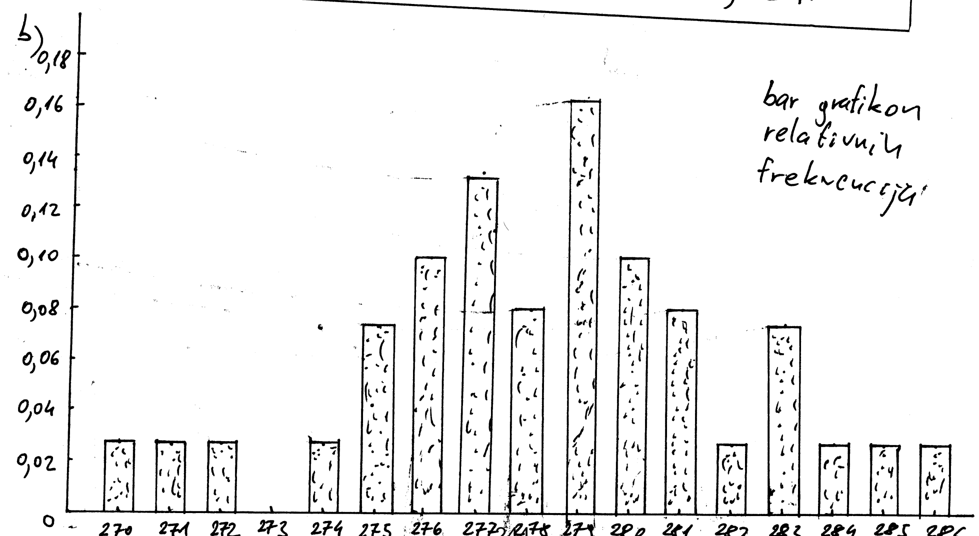
(a) Podatke iz tabele pobjedničkih rezultata predstaviti pomoću relativne frekventne tabele.

(b) Nacrtati ove podatke pomoću relativnog frekventnog bar grafikona.

Rj. 37 datih pobjedničkih rezultata uzimaju vrijednosti od 270 do 286. Odgovarajuća relativna frekventna tabela je:

Pobjednički rezultat	Frekvencija f	Relativna frekvencija f/37
270	1	0,027
271	1	0,027
272	1	0,027
274	1	0,027
275	2	0,054
276	4	0,108
277	5	0,135
278	3	0,081
279	6	0,162
280	4	0,108
281	3	0,081
282	1	0,027
283	2	0,054
284	1	0,027
285	1	0,027
286	1	0,027

b)

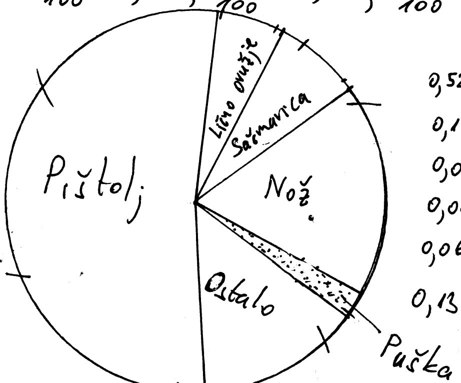


(#) Podatke iz sljedeće tabele predstaviti pomoću zvrk grafikona

Tip oružja	Procenat ubistava u većem zapadnom gradu uzrokovana ovim oružjem
Pištolj	52
Nož	18
Sačmarica	7
Puška	4
Lično oružje	6
Ostalo	13

Rj: Zvrk grafikon se često koristi za prikaz relativnih frekvencija kada su podaci nenumerički. Nacrta se krug i onda se podijeli na različite odsječke (sektore), svaki koji predstavlja različitu vrijednost podatka. Površina svakog sektora, koja bi trebala da predstavlja relativnu frekvenciju vrijednosti koju taj sektor predstavlja, se određuje na sljedeći način.

$\frac{52}{100}=0,52$; $\frac{18}{100}=0,18$; $\frac{7}{100}=0,07$; $\frac{4}{100}=0,04$;



$0,52 \cdot 360° = 187,2$

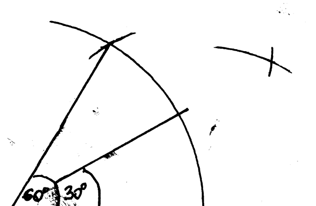
$0,18 \cdot 260° = 64,8$

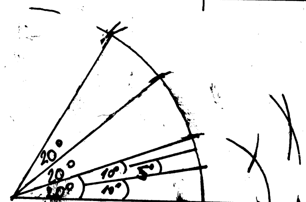
$0,07 \cdot 360° = 25,2$

$0,04 \cdot 360° = 14,4$

$0,06 \cdot 360° = 21,6$

$0,13 \cdot 360° = 46,8$





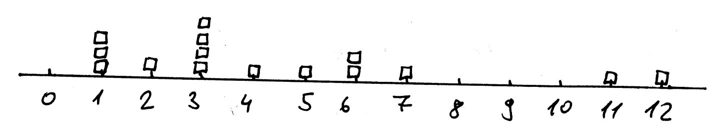
Zadaci za vježbu

(1.) Sljedeći podaci predstavljaju veličine 30 porodica koje su odrastale u malom gradu u Gvatemali:

5, 13, 9, 12, 7, 4, 8, 6, 6, 10, 7, 11, 10, 8, 15, 8, 6, 9, 12, 10, 7, 11, 10, 8, 12, 9, 7, 10, 7, 8.

(a) Konstruisati frekventnu tabelu za ove podatke
(b) Prikazati podatke koristeći linijski grafik
(c) Nacrtati podatke pomoću poligona frekvencija.

(2.) Petnaestorici srednjoškolaca iz četvrtog razreda je postavljeno pitanje koliko kilometara im je mjesto gdje žive udaljeno od škole. Rezultati su prikazani u sljedećem grafu.



(a) Koliki je najveći broj kilometara nekom studentu mjesto gdje živi udaljeno od škole?
(b) Koliki je najmanji broj kilometara?
(c) Koliko učenika živi manje od 5 kilometara od škole?
(d) Koliko učenika živi više od 4 kilometra od škole

(3.) Tabela desno prikazuje sve vrijednosti ali samo neke frekvencije za simetričan skup podataka. Popuniti brojeve koji nedostaju.

Vrijednost	Frekvencija
10	8
20	
30	7
40	
50	3
60	

4. Nacrtati relativnu tabelu frekvencija za podatke iz Problema 1. Ove relativne frekvencije prikazati pomoću linijskog grafa.

5. Sljedeća tabela relativnih frekvencija je dobijena iz skupa podataka o broju hitnih operacija slijepog crijeva koje se izvode svakog mjeseca u jednoj bolnici

Vrijednost	0	1	2	3	4	5	6	7
Relativna frekvencija	0,05	0,08	0,12	0,14	0,16	0,20	0,15	0,10

(a) Koliki postotak mjeseci imaju manje od dvije hitne operacije slijepog crijeva?

(b) Koliki postotak mjeseci imaju više od 5?

(c) Da li je ovaj skup podataka simetričan?

6. Sljedeća tabela prikazuje brojke smrti na Bosanskim cestama u 1987 za ljude u različitim klasifikacijama

Klasifikacija	Broj smrti
Pješaci	1699
Biciklisti	280
Motoristi	650
Vozači auta	1327

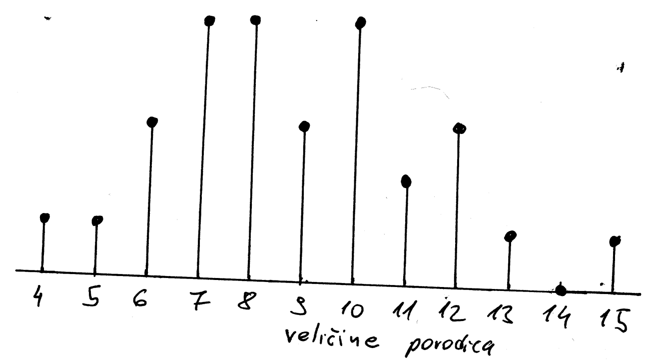
Prikazati ovaj skup podataka pomoću zvrk grafikona.

Odgovori:

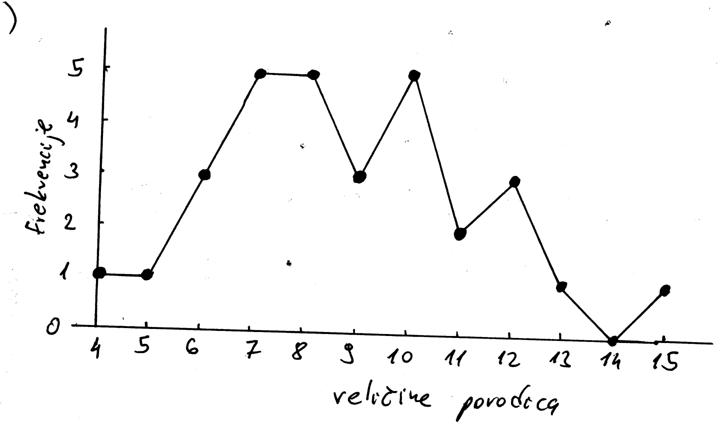
1. (a)

Veličina porodice	Frekvencija
4	1
5	1
6	3
7	5
8	5
9	3
10	5
11	2
12	3
13	1
14	0
15	1

(b)



(c)



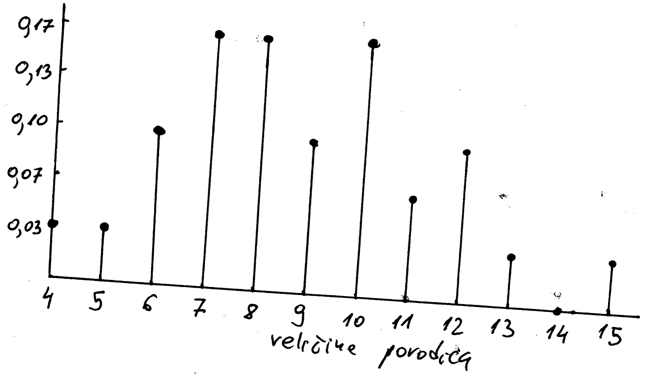
2. (a) 12
(b) 1
(c) 3
(e) 3

3.

Vrijednost	Frekvencija
10	8
20	3
30	7
40	7
50	3
60	8

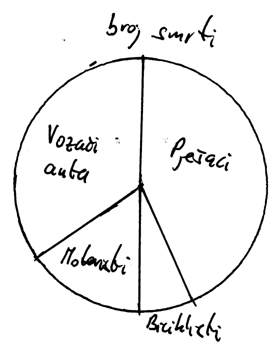
4.

Veličina porodice	Frekvencija	Relativna frekvencija
4	1	0,03
5	1	0,03
6	3	0,10
7	5	0,17
8	5	0,17
9	3	0,10
10	5	0,17
11	2	0,07
12	3	0,10
13	1	0,03
14	0	0,00
15	1	0,03



5. (a) 0,13
(b) 0,25
(c) Ne

6.



Grupirani podaci i histogrami

Kao što smo vidjeli u prethodnoj lekciji koristeći linijski ili bar grafikon za prikaz frekvencija vrijednosti podataka je često efikasan način za portrivanje skupa podataka. Bez obzira, za neke skupove podataka broj različitih vrijednosti je prevelik da primjenimo ovaj pristup. Umjesto toga, u tom slučaju, mi ćemo podjeliti vrijednosti u grupe, ili klase intervala, pa tek onda ćemo prikazati broj vrijednosti podataka koja pripada svakoj od ovih klasa intervala. Broj klasa intervala koje ćemo izabrati će imati dvije oštrice

(1) ako izaberemo premalo klasa tada ćemo izgubiti previše informacija o stvarnim vrijednostima podataka u klasi

(2) ako izaberemo previše klasa tada ćemo, zbog premalenog broja frekvencija u svakoj klasi, kao rezultat dobiti uzorak iz kojeg je teško vidjeti strukturu.

Iako je od 5 do 10 klasa intervala uobičajeno, približan broj je subjektivan izbor, i naravno možete eksperimentisati sa različitim brojem klasa intervala i posmatrati koji od dobijenih grafikona najviše odgovara podacima. Vrlo je uobičajeno, iako ne esencijalno, da su izabrane klase intervala jednake dužine.

(#) Sljedeća tabela predstavlja nivo holesterola u krvi 40 studenata druge godine Politehničkog fakulteta.

Tabela 1 – Nivo holesterola u krvi

213	174	193	196	220	183	194	200
192	200	200	199	178	183	188	193
187	181	193	205	196	211	202	213
216	206	195	191	171	194	184	191
221	212	221	204	204	191	183	227

(a) Predstaviti ovaj skup podataka pomoću histograma frekvencija
(b) Navesti glavne korake za konstrukciju histograma iz datog skupa podataka
(c) Navesti nekoliko stvari koje mogu biti pročitane iz histograma (u opštem slučaju).

Rj.
(a) Prije nego što odredimo veličine klasa frekvencija, korisno je da poredamo date podatke u rastućem redu. Time dobijamo sljedeću tabelu

Tabela 2 – Nivo holesterola u rastućem poretku

171, 174, 178, 181, 183, 183, 183, 184, 187, 188, 191, 191, 191, 192, 193, 193, 193, 194, 194, 195, 196, 196, 199, 200, 200, 200, 202, 204, 204, 205, 206, 211, 212, 213, 213, 216, 220, 221, 221, 227

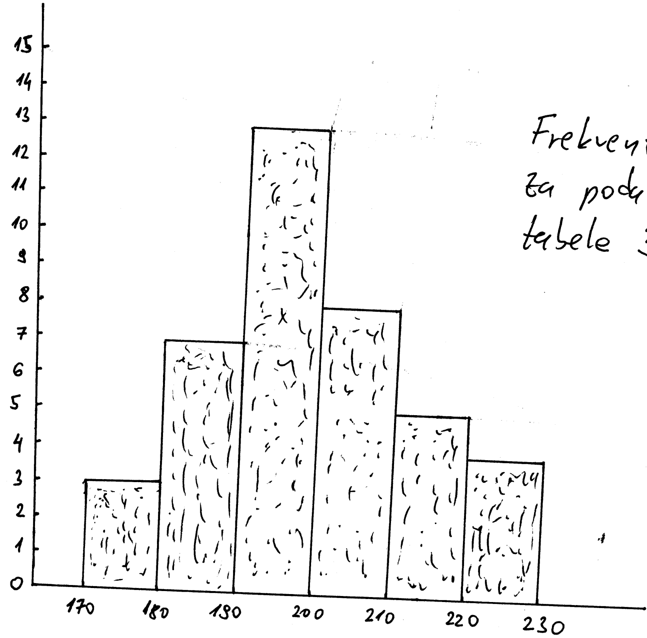
S obzirom da rang podataka ima najmanju vrijednost 171, a najveću vrijednost 227, krajnja-lijeva granica prve klase intervala mora biti manja ili jednaka 171, a desna-krajnja granica zadnje klase intervala mora biti veća od 227. Jedan izbor bi bio da za prvu klasu uzmemo interval [170, 180). Time ćemo dobiti šest klasa intervala. Tabela frekvencija (frekventna tabela) datih frekvencije (kao i relativnih frekvencija) vrijednosti podataka koje pripadaju svakoj klasi intervala je prikazana u sljedećoj tabeli.

Tabela 3 – Frekventna tabela nivoa holesterola u krvi

Klasa intervala	Frekvencija	Relativna frekvencija
[170, 180)	3	$\frac{3}{40}=0,075$
[180, 190)	7	$\frac{7}{40}=0,175$
[190, 200)	13	$\frac{13}{40}=0,325$
[200, 210)	8	$\frac{8}{40}=0,20$
[210, 220)	5	$\frac{5}{40}=0,125$
[220, 230)	4	$\frac{4}{40}=0,10$

Primjetimo da $200 \in [200, 210)$ a da $200 \notin [190, 200)$.

Bar grafikon podataka, sa pravougaonicima naštimanih jedan pored drugog, se naziva histogram. Vertikalna osa histograma može predstavljati ili klasu frekvencija ili relativnu klasu frekvencija. U prvom slučaju histogram se naziva frekventni histogram a u drugom relativni frekventni histogram. Sljedeća slika predstavlja frekventni histogram podataka iz Tabele 3.



Frekventni histogram za podatke iz tabele 3

Važno je prepoznati da klase frekventne tabele, ili histograma baziranog na toj tabeli, ne sadrži sve informacije iz orginalnog skupa podataka. Ove dvije reprezentacije bilježe samo broj vrijednosti podataka svake klase, a ne stvarne vrijednosti podataka između sebe. Time, bez obzira što su takve tabele i grafikoni korisni za prikaz podataka, orginalni red skupa podataka se uvijek mora sačuvati.

b) Kako konstruisati histogram iz skupa podataka?

1. Složiti podatke u rastućem poretku
2. Izabrati klasu intervala tako da su sve tačke podataka pokrivene

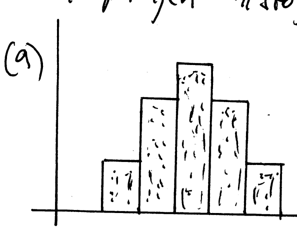
3. Konstruisati frekventnu tabelu
4. Nacrtati susjedne pravougaonike čija je visina određena sa frekvencijama iz koraka 3

c) Važnost histograma je ta da omogućava organizovanje i prezentaciju podataka grafički tako da nam skrene pažnju na određene važne osobine podataka. Na primjer, histogram često može uputiti na

1. Koliko simetrični su podaci
2. Na koji način su raspodjeljeni podaci
3. Da li postoje intervali koji imaju visok nivo koncentracije podataka
4. Da li postoje praznine u podacima
5. Da li su neke vrijednosti podataka previše udaljeni od drugih.

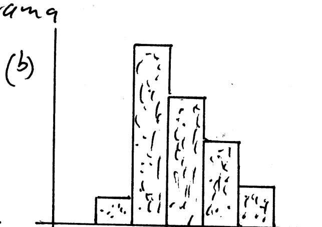
Neki primjeri histograma

(a)



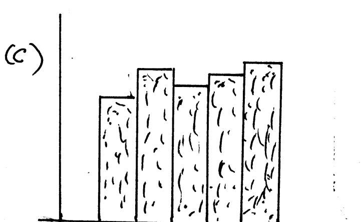
SIMETRIČAN

(b)



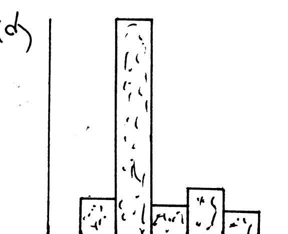
NE SIMETRIČAN

(c)



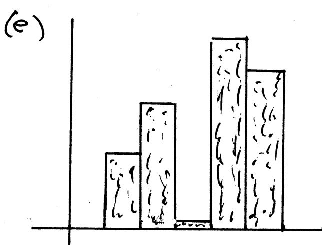
RASPODJELJEN

(d)



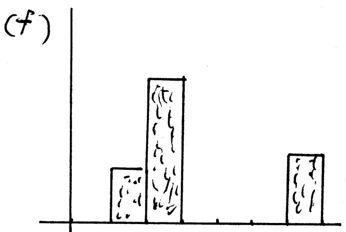
KONCENTRISAN

(e)



SA PRAZNINOM

(f)



S PREVELIKOM UDALJEN.

Data tabela prikazuje stopu nataliteta (po 1000 stanovnika) u 50 glavnih gradova država većinom iz Evrope.

Tabela 1 – Stopa nataliteta po 1000 stanovnika

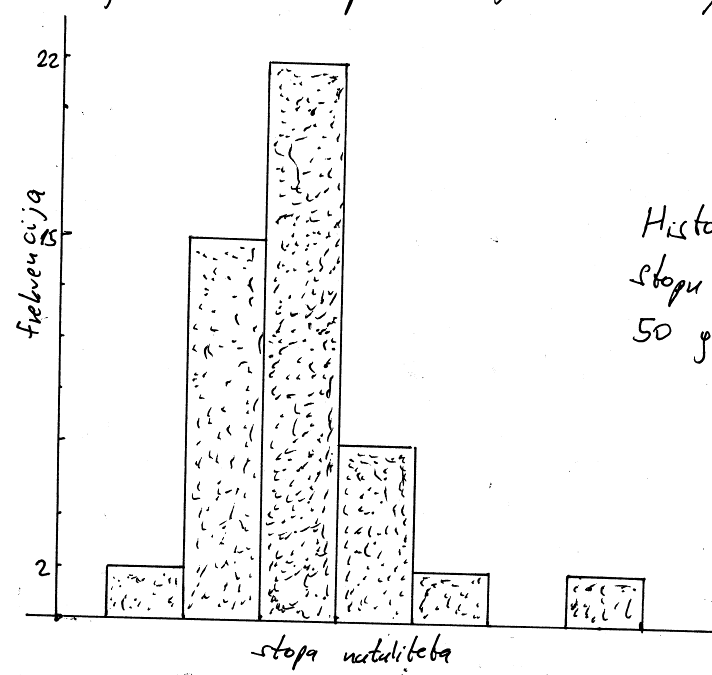
Grad	Stopa nataliteta	Grad	Stopa nataliteta	Grad	Stopa nataliteta
Tirana	14,2	Toršavn	15,7	Vilnius	14,9
Andora la Vela	21,9	Helsinki	13,8	Luksemburg	14,4
Beč	19,0	Pariz	14,4	Skoplje	15,5
Minsk	14,5	Berlin	16,3	Valeta	14,1
Brisel	13,2	Gibraltar	15,4	Čisinu	15,3
Sarajevo	15,9	Atena	15,3	Monako	15,7
Sofija	14,7	Budimpešta	16,1	Podgorica	15,4
Sant Helier	17,1	Dablin	15,5	Amsterdam	15,5
Zagreb	15,2	Daglas	14,1	Oslo	17,7
Nikosia	17,1	Rim	15,1	Varšava	21,2
Prag	17,6	Priština	16,5	Lisabon	14,0
Kopenhagen	15,2	Riga	16,2	Bukurešt	15,3
Talin	16,0	Vaduz	15,1	San Marino	15,4
Beograd	14,8	Bratislava	17,9	Ljubljana	13,4
Madrid	13,1	Longerbin	16,2	Štokholm	14,8
Bern	14,2	Kijev	15,6	London	13,7
Moskva	14,1	Ankara	16,5		

Prikazati ove podatke pomoću histograma frekvencija.

Rj. S obzirom da je rang podataka od najmanje vrijednosti 13,4 do najveće vrijednosti 21,9, za klasu intervala ćemo uzeti dužinu 1,5, polazeći od vrijednosti 12. Sa ovom klasom intervala dobićemo sljedeću tabelu frekvencija.

Interval	Frekvencija	Interval	Frekvencija
[12,0; 13,5)	2	[18,0; 19,5)	2
[13,5; 15,0)	15	[19,5; 21,0)	0
[15,0; 16,5)	22	[21,0; 22,5)	2
[16,5; 18,0)	7		

Histogram za ove podatke je dat na sljedećoj slici:



Histogram za stopu nataliteta u 50 gradova

U biti, histogram je bar grafikon koji prikazuje frekvencije ili relativne frekvencije podataka koje pripadaju različitim klasama intervala. Ove klase frekvencija se također mogu grafički prikazati pomoću frekventnog (ili relativno frekventnog) poligona. Tada svaka klasa intervala je predstavljena pomoću vrijednosti, obično uzeta kao sredina tog intervala. Crtamo tačke koje predstavljaju frekvenciju klase intervala i onda spajamo tačke pravim linijama i dobijamo frekventni poligon.

(#) Sljedeća tabela predstavlja klase frekvencija za sistolički krvni pritisak dvije grupe industrijskih radnika muškog spola: dvije starosne grupe, prva od 30 do 40 godina i druga od 50 do 60 godina.

Tabela 1- Klase frekvencija sistoličkog krvnog pritiska dvije grupe radnika muškog spola

Krvni pritisak	Broj radnika	
	Godine od 30 do 40	Godine od 50 do 60
Manji od 90	3	1
90-99	17	2
100-109	118	23
110-119	460	57
120-129	768	122
1 0-139	675	149
140-149	312	167
150-159	120	73
160-169	45	62
170-179	18	35
180-189	3	20
190-199	1	9
200-209		3
210-219		5
220-229		2
230-240		1
Ukupno	2540	731

Grafički usporediti dvije date grupe radnika.

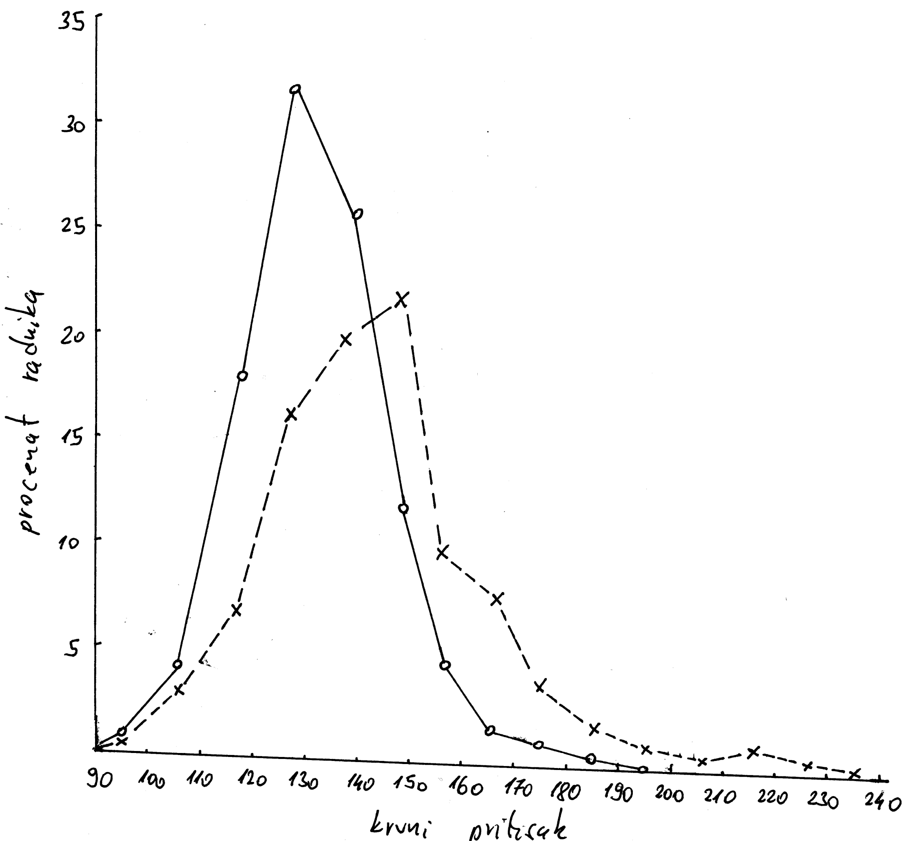
Rj. S obzirom da je ukupan broj radnika u obe grupe različit, teško je direktno napraviti poređenje krvnog pritiska za ove dvije grupe.

Da bi uklonili ovu teškoću možemo izračunati i grafički prikazati relativne frekvencije za svaku od klasa. To jest, podjelićemo sve frekvencije koje se odnose na radnike od 30 do 39 godina sa 2540 (ukupan broj takvih radnika) i sve frekvencije koje se odnose na radnike od 50 do 59 godina sa 731, kao rezultat imamo sljedeću tabelu.

Tabela 2- Relativne klase frekvencija krvnog pritiska

Krvni pritisak	Procenat radnika	
	Godine 30-40	Godine 50-60
<90	0,12	0,14
[90, 100)	0,67	0,27
[100, 110)	4,65	3,15
[110, 120)	18,11	7,80
[120, 130)	30,24	16,69
[130, 140)	26,57	20,38
[140, 150)	12,28	22,84
[150, 160)	4,72	9,99
[160, 170)	1,77	8,48
[170, 180)	0,71	4,79
[180, 190)	0,12	2,74
[190, 200)	0,04	1,23
[200, 210)		0,41
[210, 220)		0,68
[220, 230)		0,27
[230, 240)		0,14
Ukupno:	100.00	100.00

Sljedeća figura grafički predstavlja poligon relativnih frekvencija za obe starosne grupe. Imajući da frekventna poligona na istom grafu lagano možemo napraviti poređenje dva skupa podataka. Na primjer, čini se da je krvni pritisak starije grupe mnogo rašireniji među većim vrijednostima nego kod mlađe starosne grupe.



Relativni poligon frekvencija za podatke iz Tabele 2.

Zadaci za vježbu

1. Sljedeći skup podataka predstavljaju rezultate testa inteligencije (IQ) od 40 učenika šestih razreda neke osnovne škole:

114, 122, 103, 118, 99, 105, 134, 125, 117, 106, 109, 104,
111, 127, 133, 111, 117, 103, 120, 98, 100, 130, 141, 119,
128, 106, 109, 115, 113, 121, 100, 130, 125, 117, 119, 113,
104, 108, 110, 102

(a) Predstaviti ove podatke pomoću histograma frekvencija.
(b) Koje klase intervala sadrže najveće broj vrijednosti podataka?
(c) Da li padaju približno jednak broj podataka u svakoj klasi intervala?
(d) Da li je histogram približno simetričan? Ako jest oko kojeg intervala se nalazi ova približna simetrija?

2. Sljedeći podaci predstavljaju visinu dnevne temperature (u stepenu celzijusa) na datum 1. maju u Zenici u nizu od 30 godina

22,8; 26,2; 31,7; 31,1; 26,9; 28,0; 29,4; 28,8; 26,7;
27,4; 28,2; 30,3; 29,5; 28,9; 27,5; 28,3; 24,1; 25,3;
28,5; 27,7; 24,4; 29,2; 30,3; 33,7; 27,5; 29,3; 30,2;
28,5; 32,2; 33,7;

(a) Prikazati ovaj skup podataka pomoću histograma frekvencija.
(b) Da li biste mogli reći kolika je "tipična" temperatura prvog maja u Zenici?
(c) Kakvi drugačiji zaključci se mogu izvesti iz histograma?

(3) Data je koncentracija ozona (mjerena po dijelovima po 100 miliona) zraka u jednom dijelu Zenice mjerena 25 uzastopnih ljetnih dana u 2004:

6,2; 9,1; 2,4; 3,6; 1,9; 1,7; 4,5; 4,2; 3,3; 5,1; 6,0; 1,8; 2,3; 4,9; 3,7; 3,8; 5,5; 6,4; 8,6; 9,3; 7,7; 5,4; 7,2; 4,9; 6,2;

(a) Konstruisati histogram frekvencija za ove podatke tako da se interval [3,5) nalazi među klasama intervala.

(b) Konstruisati histogram frekvencija za ove podatke tako da se interval [2,3) nalazi među klasama intervala.

(c) Za koji frekventni histogram smatrate da sadrži više informacija.

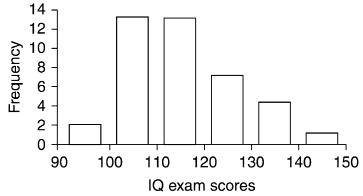
(4) Posmatrajmo nivo holesterola u krvi 100 studenata iz sljedeće tabele

Student	Holesterol	Spol
1	213	Ž
2	174	M
3	193	Ž
4	196	Ž
5	220	Ž
6	183	M
7	194	Ž
8	200	Ž
9	192	M
10	200	Ž
11	200	M
12	199	Ž
13	178	M
14	183	M
15	188	Ž
16	193	Ž
17	187	Ž
18	181	M
19	183	M
20	205	M
21	196	M
22	211	Ž
23	202	M
24	213	Ž
25	216	M
26	206	M
27	195	Ž
28	191	M
29	171	M
30	194	M
31	184	Ž
32	191	M
33	221	Ž
34	212	Ž
35	221	M
36	204	Ž
37	204	Ž
38	191	M
39	183	Ž
40	227	M
41	188	M
42	200	M
43	197	M
44	208	Ž
45	218	Ž
46	194	Ž
47	212	Ž
48	207	Ž
49	219	M
50	201	Ž
51	208	M
52	192	M
53	192	M
54	191	M
55	196	M
56	193	M
57	185	M
58	201	M
59	185	M
60	203	M
61	172	M
62	213	Ž
63	192	Ž
64	193	Ž
65	212	M
66	188	M
67	201	Ž
68	219	M
69	189	M
70	203	Ž
71	186	M
72	186	M
73	196	M
74	195	Ž
75	205	Ž
76	223	Ž
77	195	M
78	205	Ž
79	198	M
80	215	M
81	202	Ž
82	196	Ž
83	196	M
84	190	Ž
85	185	Ž
86	188	M
87	197	Ž
88	196	Ž
89	227	M
90	211	Ž
91	219	M
92	202	Ž
93	204	M
94	213	Ž
95	202	Ž
96	205	M
97	184	M
98	198	M
99	180	M
100	204	Ž

Podjeliti ove studente po spolu i konstruisati tabelu klasa relativnih frekvencija za svaku grupu. Nacrtati, na istom grafiku, odvojeno, poligon klasa relativnih frekvencija za muške i ženske studente. Može li se ikakav zaključak izvući o relaciji između spola i nivoa holesterola.

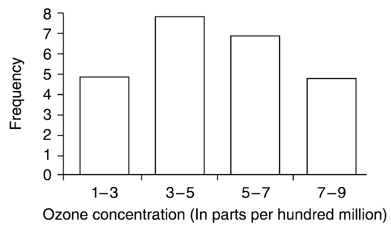
Odgovori:

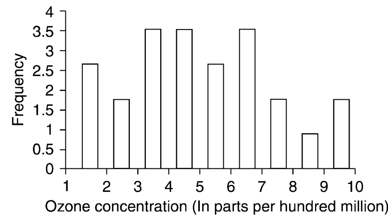
1.



Class intervals 100–110 and 110–120
No
No

3.

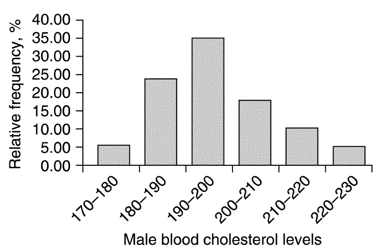




The chart in part (a) seems more informative since it shows a clearer pattern.

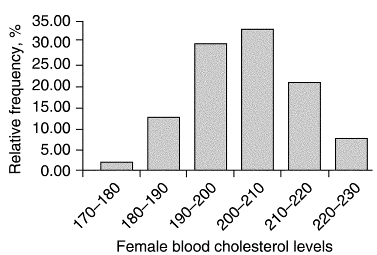
4.

(a)

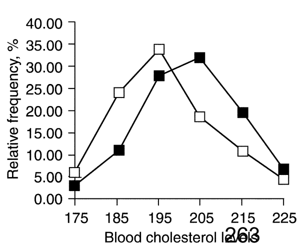


Female cholesterol	Frequency	Relative frequency
170–180	1	1/46 = 0.02
180–190	5	5/46 = 0.11
190–200	13	13/46 = 0.28
200–210	15	15/46 = 0.33
210–220	9	9/46 = 0.20
220–230	3	3/46 = 0.07

(b)



Male cholestrol	Frequency	Relative frequency
170–180	3	3/54 = 0.06
180–190	13	13/54 = 0.24
190–200	19	19/54 = 0.35
200–210	10	10/54 = 0.19
210–220	6	6/54 = 0.11
220–230	3	3/54 = 0.06



Female students appear to have higher cholesterol levels.

Prikaz pomoću stabljika-i-listova

Veoma efikasan način da prikažemo malu-do-umjerenu veličinu podataka je da koristimo prikaz pomoću stabljike-i-listova. Takav prikaz dobijemo dijeleći svaku od vrijednosti podatka na dva dijela – na njegovu stabljiku i njegov list. Na primjer, ako je podatak dvocifren broj, tada možemo pustiti da je stabljika podatka vrijednost desetice a list vrijednost jedinice. To jest, vrijednost 84 možemo izraziti kao

stabljika	list
8	4

a podaci su dvije vrijednosti 84 i 87 mogu izraziti kao

stabljika	list
8	4, 7

(#) Data je tabela koja predstavlja prihod po glavi stanovnika 48 država Evrope.

Tabela 1 – Prihod po glavi stanovnika (KM-ova po osobi)

Ime države		Ime države		Ime države	
Albanija	30 941	Farski otoci	25 057	Litvanija	23 941
Andora	25 128	Finska	33 404	Luksemburg	36 043
Austria	32 151	Francuska	28 240	Makedonija	27 711
Bjelorusija	26 183	Njemačka	28 280	Malta	26 982
Belgija	23 512	Gibraltar	29 141	Moldavija	29 405
Bos. i Herc.	32 996	Grčka	25 579	Monako	25 575
Bugarska	33 279	Mađarska	25 446	Crna Gora	28 731
Šanel ostrva	42 706	Irska	27 744	Holandija	31 727
Hrvatska	32 779	Mana ostrvo	36 298	Norveška	31 319
Kipar	42 120	Italija	39 244	Poljska	25 400
Češka rep.	29 596	Kosovo	30 296	Portugal	26 894
Danska	28 821	Latvia	34 071	Rumunija	27 671
Estonija	30 001	Lihtenštajn	22 372	San Marino	28 551
Srbija	28 936	Slovačka	30 180	Slovenija	24 306
Španija	25 020	Svalbard	34 334	Švedska	29 567
Švicarska	29 771	Ukrajina	39 453	Velika Britanija	32 922

Nacrtati prikaz pomoću stabljika-i-listova.

Rj. Podaci dati u tabeli se mogu predstaviti pomoću sljedećeg stabljika-i-list prikaza. Primjetimo da su vrijednosti za listove postavljeni u prikazu u rastućem poretku

22	372
23	512; 941
24	706
25	020; 057; 128; 400; 446; 575; 579
26	183; 894; 982
27	671; 711; 744
28	240; 280; 551; 731; 821; 936
29	141; 405; 567; 596; 771;
30	001; 180; 296
31	319; 727
32	151; 779; 922; 996
33	276; 404
34	071; 334
36	043; 298
39	244; 453
42	120; 706

Izbor za stabljike uvijek treba biti napravljen na takav način da rezultirajući stabljika-i-list prikaz sadrži što više informacija o podacima (npr. vidi sljedeći primjer).

(#) Sljedeći podaci predstavljaju postotak učenika koji pohađaju javnu osnovnu školu i koji su klasificirani kao manjina u 18 gradova BiH.

55,2; 47,8; 44,6; 64,2; 61,4; 36,6;
28,2; 57,4; 41,3; 44,6; 55,2; 39,6;
40,9; 52,2; 63,3; 34,5; 30,8; 45,3

Nacrtati stablјika-i-list prikaz podataka.

Rj.
Ako pustimo da stablјika označava cifru desetice a da list predstavlja ostatak vrijednosti, tada stablјika-i-list prikaz za dati skup podataka je sljedeći

2	8,2
3	0,8; 4,5; 6,6; 9,6
4	0,9; 1,3; 4,6; 5,3; 5,3; 7,8
5	2,2; 5,2; 5,2; 7,4
6	1,4; 3,3; 4,2

Mogli smo uzeti da stablјika predstavlja cio broj, a list decimalni dio vrijednosti, tako da bi vrijednost 28,2 bila prikazana kao

28 | ,2

Bezobzira, ovo bi kao rezultat dovelo do previše stablјika (sa premalo listova) i time podaci uopšte nebi bili jasno prikazani.

(#) Sljedeći stablјika-i-list prikaz predstavljaju težine 80 učesnika sportskih dešavanja. Stablјika predstavlja brojku desetice, a listovi cifru jedinice.

10	2; 3; 3; 4; 7	(5)
11	0; 1; 2; 2; 3; 6; 9	(7)
12	1; 2; 4; 4; 6; 6; 6; 7; 9	(9)
13	1; 2; 2; 5; 5; 6; 6; 8; 9	(9)
14	0; 4; 6; 7; 7; 9; 9.	(7)
15	1; 1; 5; 6; 6; 6; 7	(7)
16	0; 1; 1; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 8	(10)
17	1; 1; 3; 5; 6; 6; 6	(7)
18	1; 2; 2; 5; 5; 6; 6; 9	(8)
19	0; 0; 1; 2; 4; 5	(6)
20	9; 9	(2)
21	7	(1)
22	1	(1)
23		(0)
24	9	(1)

Obrazložiti kakve informacije možemo pročitati iz datih podataka.

Rj.
Prvo primjetimo da brojevi u zagradama na desnoj strani predstavljaju broj vrijednosti u svakoj klasi list. Ovi brojevi koji predstavljaju zbir su često korisni. Na primjer, oni nam govore da postoji 10 vrijednosti koje imaju stablјiku 16, tj. 10 osoba imaju težinu između 160 i 169. Primjetimo da stablјika bez i jednog lista (kao npr. vrijednost 23) nam

govori da nema ničega u toj klasi.

Iz datog prikaza jasno je da su skoro sve vrijednosti podataka između 100 i 200, i da su skoro uniformno (ravnomjerno) raspoređeni u ovom regionu, sa izuzetkom na manje vrijednosti u intervalima između 100 i 110 i između 190 i 200.

Napomena: Ako se desi da jedna stabljika ima previše listova npr.

6 | 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9

tada ovaj prikaz "razbijemo" u dvije linije

6 | 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4
6 | 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9

Zadaci za vježbu

1. Za sljedeće podatke nacrtati stabljika-i-list prikaz koji ima (a) 4 stabljike
(b) 8 stabljika

124; 129; 118; 135; 114; 139; 127; 141; 111; 144; 133; 127;
122; 119; 132; 137; 146; 122; 119; 115; 125; 132; 118; 126;
134; 147; 122; 119; 116; 125; 128; 130; 127; 135; 122; 141.

2. Sljedeći podaci predstavljaju broj godina, tačnije najbližu godinu, od 43 pacijenta koji su primljeni u odjel za hitne slučajeve neke bolnice za odrasle:

23; 18; 31; 79; 44; 51; 24; 19; 17; 25; 27; 19; 44; 61; 22;
18; 14; 17; 29; 31; 22; 17; 15; 40; 55; 16; 17; 19; 20; 32;
20; 45; 53; 27; 16; 19; 22; 20; 18; 30; 20; 33; 21

Nacrtati stabljiku i list prikaz za ove podatke. Koristiti ovaj nacrt da bi odredili 5-godišnji interval koji sadrži najveći broj tački.

3. Sljedeći podaci predstavljaju Zeničku dnevnu naplatu sa parking mjesta (jedinice su u 100 km) tokom 30 dana u 2013-oj.

83; 97; 108; 77; 58; 88; 65; 52; 104; 75; 80; 83; 74; 68; 94;
71, 78, 83, 90; 79; 84; 81; 68; 57; 59; 32; 75; 93; 100; 88

(a) Predstaviti ove podatke pomoću stabljike-i-list prikaza

(b) Da li neki podatak izgleda "sumnjiv"? Zašto?

4. Dat je sljedeći stabljika-i-list prikaz nekih podataka

2	1, 1, 4, 7
3	0, 0, 3, 3, 6, 9, 9, 9
4	2, 2, 5, 8, 8, 8
5	1, 1, 7, 7
6	3, 3, 3, 6
7	2, 2, 5, 5, 5, 8

(a) Koliko mnogo vrijednosti podataka je u 40-tim?
(b) Koliki procenat vrijednosti je veći od 50?
(c) Koliki postotak vrijednosti imaju cifru jedinice jednaku 1?

5. Koristan način za poređenje dva skupa podataka je da stavimo njihov stabljika-i-list prikaz jedan pored drugog. Ono što slijedi predstavlja rezultate standardnog ispita učenika iz dvije različite škole. U obe škole 24 studenta su pristupili ispitu

Škola A Listovi	Stabljika	Škola B Listovi
0	5	3, 5, 7
8, 5	6	2, 5, 8, 9, 9
9, 7, 4, 2, 0	7	3, 6, 7, 8, 8, 9
9, 8, 8, 7, 7, 6, 5, 3	8	0, 2, 3, 5, 6, 6
8, 8, 6, 6, 5, 5, 3, 0	9	0, 1, 5
	10	0

(a) Koja škola je imala "veće rezultate"?
(b) Koja škola je imala "niže rezultate"?
(c) Koja škola je uradila bolje na ispitima?
(d) Kombinujte ove dvije škole i napravite stabljika-i-list prikaz za svih 48 vrijednosti.

Odgovori:

1. (a)

11	1, 4, 5, 6, 8, 8, 9, 9, 9
12	2, 2, 2, 2, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 9
13	0, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 9
14	1, 1, 4, 6, 7

(b)

11	1, 4
11	5, 6, 8, 8, 9, 9, 9
12	2, 2, 2, 2, 4
12	5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 9
13	0, 2, 2, 3, 4
13	5, 5, 7, 9
14	1, 1, 4
14	6, 7

2.

1	4
1	5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9
2	0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4
2	5, 7, 7, 9
3	0, 1, 1, 2, 3
3	
4	0, 4, 4
4	5
5	1, 3
5	5
6	1
6	
7	
7	9

The interval 15–20 contains 14 data points.
The interval 16–21 contains 17 data points.

3. (a)

3	2
4	
5	2, 7, 8, 9
6	5, 8, 8
7	1, 4, 5, 5, 7, 8, 9
8	0, 1, 3, 3, 3, 4, 8, 8
9	0, 3, 4, 7
10	0, 4, 8

(b) Yes. The value 32 seems suspicious since it is so much smaller than the others.

4. (a) 6
(b) 43.75%
(c) 12.5%

5. (a) School B
(b) School A
(c) School A
(d)

5	0, 3
5	5, 7
6	2
6	5, 5, 8, 8, 9, 9
7	0, 2, 3, 4
7	6, 7, 7, 8, 8, 9, 9
8	0, 2, 3, 3
8	5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9
9	0, 0, 1, 3
9	5, 5, 5, 6, 6, 8, 8
10	0

Skupovi podataka uređenih parova

Ponekad je skup podataka sačinjen od uređenih parova vrijednosti koje imaju neku relaciju jedna sa drugom. Tada za svaki član podatka podrazumijevamo da ima x i y vrijednost. Za i-ti par ovakve vrste podatka često koristimo oznaku $(x_i; y_i)$, $i=1,2,\dots,n$. Na primjer, kao što ćemo vidjeti u prvom zadatku x_i može predstavljati veličinu inteligencije ostvarenu na IQ testu, a y_i godišnju veličinu plate. U ovoj lekciji ćemo vidjeti kako na efikasan način prikazati skup podataka koji čine parovi vrijednosti.

(#) Sljedeća tabela prikazuje godišnju platu 30 radnika neke kompanije, kao i veličine njihovih intelincija ostvarenih na IQ testu.

Tabela 1 – Veličine plata i IQ

Radnik i	IQ rezultat x_i	Godišnje plate y_i (u 1000 km)
1	110	68
2	107	30
3	83	13
4	87	24
5	117	40
6	104	22
7	110	25
8	118	62
9	116	45
10	94	70
11	93	15
12	101	22
13	93	18
14	76	20
15	91	14

nastavak tabele

i	x_i	y_i
16	84	19
17	83	16
18	112	52
19	80	11
20	91	13
21	113	29
22	124	71
23	79	19
24	116	43
25	113	44
26	94	17
27	95	15
28	104	30
29	115	63
30	90	16

a) Nacrtati stabljika-i-list prikaz za IQ rezultate kao i za godišnju prosječnu platu;

b) Nacrtati dijagram disperzije (raspršenosti)

c) Šta možemo zaključiti iz dijagrama disperzije (raspršenosti)

d) Da li možemo na osnovu dobijenih podataka predvidjeti koliku će platu imati radnik sa IQ rezultatima od 120.

e) Koji par vrijednosti bi nazvali uljezom?

Rj.

(a) Stabljika-i-list prikaz za IQ rezultate

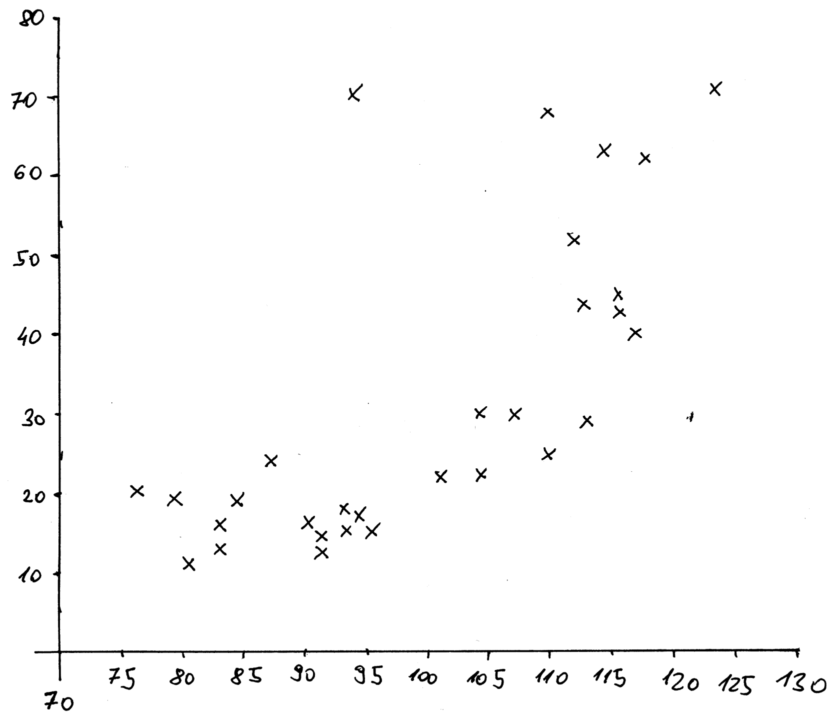
12	4	(1)
11	0, 0, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7, 8	(10)
10	1, 4, 4, 7	(4)
9	0, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5	(8)
8	0, 3, 3, 4, 7	(5)
7	6, 9	(2)

Stabljika-i-list prikaz za godišnje plate (u 1000 KM)

7	0, 1	(2)
6	2, 3, 8	(3)
5	2	(1)
4	0, 3, 4, 5	(4)
3	0, 0	(2)
2	0, 2, 2, 4, 5, 9	(6)
1	1, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9	(12)

(b) Iako nam stabljika-i-list prikaz dobijen pod (a) govori mnogo o pojedinačnom IQ rezultatu i plati radnika, oni nam ne govore ništa o relaciji između ove dvije varijable. Time, na primjer, oni sami nisu nimalo korisni u uočavanju da li veći IQ rezultat teži i većim primanjima u ovoj kompaniji. Da naučimo na koji način su podaci povezani sa ovim pitanjem; potrebno je posmatrati uređenu vrijednost svake tačke podatka istovremeno.

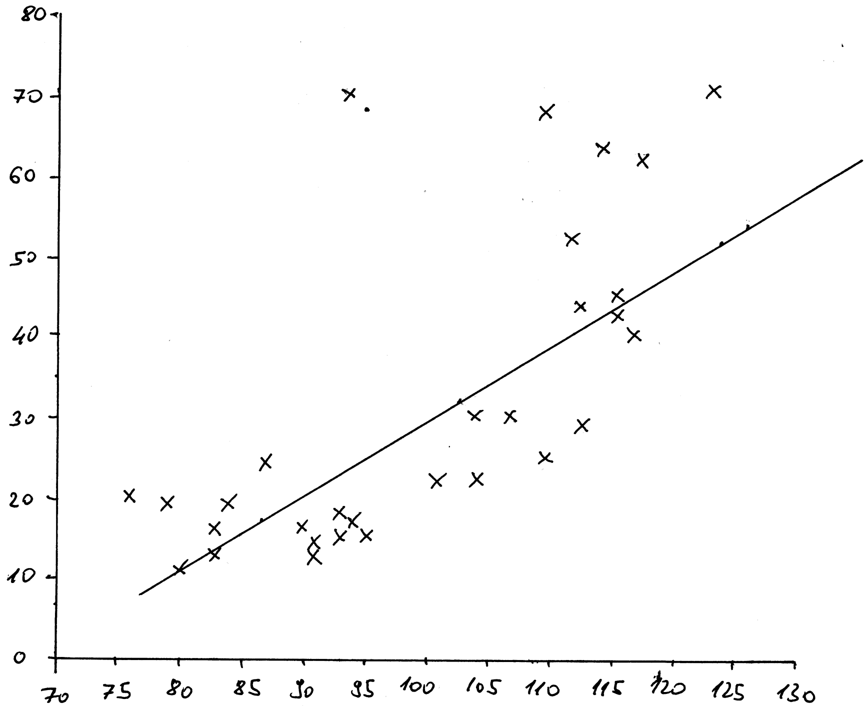
Koristan način za portiranje skupa podataka uređenih vrijednosti je da prikažemo podatke u dvodimenzionalnom pravougaonom nacrtu u kojem x-osa predstavlja vrijednost x podatka a y osa predstavlja vrijednost y podatka. Takav nacrt nazivamo dijagram disperzije. Sljedeća slika predstavlja dijagram disperzije za podatke iz postavke zadatka.



Dijagram disperzije za IQ protiv primanja

c) Iz ove slike jasno je da veći prihodi dolaze zajedno sa većim rezultatima ostvarenim na IQ testu.

d) Dijagram disperzije prikazan iznad izgleda da također ima neke korisne osobine. Na primjer, pretpostavimo da želimo predvidjeti platu radnika čiji je IQ test 120. Jedan način da ovo uradimo je da "odmjerimo od oka" pravu kroz dati skup podataka, kao što je urađeno na sljedećoj slici.



Kako vrijednost y na liniji odgovara vrijednosti x imamo da za 120 odgovara 45, ovo izgleda kao realna procjena za godišnju platu radnika čiji je IQ jednak 120.

e) Dijagram disperzije može biti koristan za uočavanje uljeza, koji su tačke podataka koje ne prate pravila pozicije ostalih tački (npr. tačka sa koordinatama (94; 70)). Kada uočimo uljeze, tada možemo odlučiti da li parovi podataka imaju značenje ili su uzrokovani greškom u podacima.

Zadaci za vježbu

1. U pokušaju da odredi povezanost između dnevne podnevne temperature (mjerene u stepenima Celzijusa) i broja neispravnih dijelova proizvedenih tokom dana, neka kompanija je zabilježila sljedeće podatke nad 22 dana.

Temperatura	Broj neispravnih dijelova	Temperatura	Broj neispravnih dijelova
24,2	25	24,8	23
22,7	31	20,6	20
30,5	36	25,1	25
28,6	33	21,4	25
25,5	19	23,7	23
32,0	24	23,9	27
28,6	27	25,2	30
26,5	25	27,4	33
25,	16	28,3	32
26,0	14	28,8	35
24,4	22	26,6	24

(a) Nacrtati dijagram disperzije.

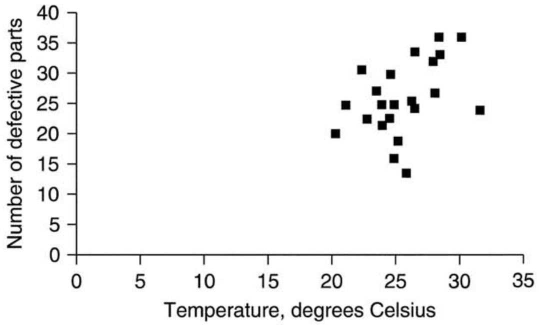
(b) Šta možete zaključiti na osnovu dijagrama disperzije?

(c) Ako sutrašnja podnevna temperatura bude 24,0; koja je vaša najbolja procjena da predvidite broj neispravnih dijelova koji se proizvedu.

Odgovori:

1.

(a)



(b) The number of defective parts tends to increase as the temperature increases.

(c) About 23 or 24

Ključni pojmovi iz ove lekcije

Frekvencija: Broj puta koji se data vrijednost pojavi u skupu podataka.

Tabela frekvencija: Tabela koja predstavlja, za dati skup podataka, svaku različitu vrijednost kao i njezinu frekvenciju

Linijski graf: Graf tabele frekvencija. Apcisa predstavlja vrijednost podatka, a frekvencija pojavljivanja te vrijednosti je prikazana visinom vertikalne linije.

Bar dijagram (ili bar grafikon): Slično linijskom grafu, osim što je sad vrijednost frekvencije podatka prikazano visinom grede (pravougaonika).

Polinom frekvencija: Nacrt različitih vrijednosti podataka i njihovih frekvencija koje spajaju nacrtane tačke pravim linijama.

Simetrični skup podataka: Skup podataka je simetričan oko vrijednosti x_0 ako su frekvencije vrijednosti podatka x_0-c i x_0+c iste za sve vrijednosti c.

Relativna frekvencija: Frekvencija vrijednosti podataka podjeljena sa brojem dijelova podataka u skupu.

Zvrk grafikon: Dijagram koji prikazuje relativne frekvencije podjelom kruga na različite sektore.

Histogram: Grafikon u kome su podaci podjeljeni na klase intervala, čije su frekvencije prikazane u bar grafikonu.

Relativni histogram frekvencija: Histogram koji prikazuje relativne frekvencije za svaku vrijednost podatka u skupu.

Stabljika-i-list prikaz: Slično histogramu osim što su frekvencije prikazane povezujući zajedno zadnje brojke (listove) podataka.

Dijagram disperzije (raspršenosti): Dvo-dimenzionalni prikaz skupa podataka kao uređene vrijednosti.

Korištenje statistike za sumiranje podataka

Sredina uzorka

Pretpostavimo da imamo uzorak od n tački podataka čije vrijednosti smo označili sa $x_1, x_2, \dots, x_n$. Jednu statistiku za uočavanje centra ovog skupa podataka je sredina uzorka, koja je definisana kao aritmetička sredina vrijednosti podataka.

Definicija: Sredina uzorka, koju ćemo označavati sa $\bar{x}$ (čitaj x potez ili x nadvučeno), je definisana sa

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

\# Prosječna efikasnost goriva, u kilometrima po litru, auta prodanih u BiH u godinama od 1999 do 2003 su

28,2; 28,3; 28,4; 28,5; 29,0

Pronaći sredinu uzorka ovog skupa podataka

Rj. Sredina uzorka je prosjek od pet datih vrijednosti:

$$\bar{x} = \frac{28{,}2 + 28{,}3 + 28{,}4 + 28{,}5 + 29{,}0}{5} = \frac{142{,}4}{5} = 28{,}48$$

Iz ovog primjera primjetimo da iako je sredina uzorka prosjek svih vrijednosti, ona sama ne mora biti jedna od njih, Ponovo posmatrajmo skup podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ako svaku vrijednost podatka povećamo za konstantnu količinu c, tada kao posljedicu imamo da se sredina uzorka također poveća za c. Matematički, ovo možemo izraziti pišući da, ako

$$Y_i = x_i + c, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

tada

$$\overline{Y} = \overline{x} + c$$

gdje su $\overline{Y}$ i $\overline{x}$ sredine uzorka od Y_i i x_i, redom. Prema tome, kada je pogodno, možemo izračunati $\overline{x}$ tako što ćemo prvo dodati c svim vrijednostima podataka, pa izračunati sredinu uzorka $\overline{Y}$ novih podataka, i na kraju oduzeti c od $\overline{Y}$ da bi dobili $\overline{x}$. S obzirom da je nekad mnogo lakše raditi sa transformisanim nego sa orginalnim podacima, ovo može uveliko pojednostaviti računanje od $\overline{x}$. Naš sljedeći primjer ilustruje ovo.

(#) Pobjednički rezultati na BiH Masters Golf Turniru u godinama od 1981 do 1990 bili su

278; 280; 284; 280; 277; 282; 279; 285; 281; 283;

Pronaći sredinu uzorka ovih pobjedničkih rezultata.

Rj.

I način

$$\overline{x} = \frac{278+280+284+280+277+282+279+285+281+283}{10} = \ldots$$

II način

Umjesto da direktno izračunamo sumu datih brojeva, prvo ćemo oduzeti 280 (tj. dodati $c=-280$) svakom datom broju i dobiti sljedeće izmjenjene podatke

$$-2,\ 0,\ 4,\ 0,\ -3,\ 2,\ -1,\ 5,\ 1,\ 3$$

Sredina uzorka ovih izmjenjenih podataka, koje ćemo nazvati Y, je

$$\overline{Y} = \frac{-2+0+4+0-3+2-1+5+1+3}{10} = \frac{9}{10}$$

Dodajući 280 vrijednosti $\overline{Y}$ dobićemo traženu sredinu uzorka dobijenih podataka

$$\overline{x} = 280{,}9$$

Ako svaku vrijednost podatka pomnožimo sa c, tada je i sredina uzorka pomnožena sa c. Tj., ako

$$Y_i = cX_i \qquad i=1,2,\dots,n$$

tada

$$\overline{Y} = c\,\overline{x}$$

Na primjer, pretpostavimo da je sredina uzorka visine neke grupe ljudi 2 metra. Pretpostavimo da sada želimo promjeniti jedinicu mjere iz metara u centimetre. Tada, kako je svaka nova vrijednost podatka jednaka staroj vrijednosti pomnožena sa 100, slijedi da je sredina uzorka novih podataka $2\cdot 100 = 200$. Tj sredina uzorka je 200 cm.

Naš sljedeći primjer pasmatra računanje sredine uzorka kada su podaci uređeni pomoću tabele frekvencija.

(#) Broj prodanih kostima po danu, u jednom ženskom butiku, u zadnjih 6 dana je prikazan pomoću sljedeće frekventne tabele

Vrijednost	Frekvencija
3	2
4	1
5	3

Odrediti sredinu uzorka.

Rj. S obzirom da se orginalni skup podataka sadrži od 6 vrijednosti

3, 3, 4, 5, 5, 5

slijedi da je sredina uzorka

$$\overline{x} = \frac{3+3+4+5+5+5}{6} = \frac{3\cdot 2+4\cdot 1+5\cdot 3}{6} = \frac{25}{6}$$

Tj. sredina uzorka broja dnevno prodanih kostima je 4,25.

Iz prethodnog primjera vidjeli smo da kada su podaci uređeni pomoću tabele frekvencija, sredina uzorka se može izračunati kao suma proizvoda različitih vrijednosti i njihovih frekvencija, sve to podjeljeno sa veličinom datog skupa podataka. Ovaj rezultat vrijedi u opštem slučaju. Da bi vidjeli ovo, pretpostavimo da su podaci dati pomoću tabele frekvencija i to dato je k različitih vrijednosti $x_1, x_2, \dots, x_k$ sa odgovarajućim frekvencijama $f_1, f_2, \dots, f_k$. Slijedi da je skup podataka sačinjen od n posmatranja, gdje je $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$ i gdje se vrijednost x_i pojavljuje f_i puta za $i = 1, 2, \dots, k$. Time, sredina uzorka za ove podatke je

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_1 + x_2 + \dots + x_2 + \dots + x_k + \dots + x_k}{n} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k}{n} \quad \dots (*)$$

Sada, ako su $w_1, w_2, \dots, w_k$ nenegativni brojevi čija je suma 1, tada

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_k x_k$$

nazivamo prosječna težina vrijednosti $x_1, x_2, \dots, x_k$ sa težinom w_i za x_i.

Ako (*) napišemo kao

$$\bar{x} = \frac{f_1}{n} x_1 + \frac{f_2}{n} x_2 + \dots + \frac{f_k}{n} x_k$$

vidimo da je sredina uzorka $\bar{x}$ u stvari prosječna težina skupa različitih vrijednosti.

(#) U papiru sa naslovom "Efikasnost korištenja kacige kod težine ozljeda glave u motornim nesrećama" (izdano u Žurnalu Američke Statističke Asocijacije, 1992, str. 48-56), A. Weiss analizira uzorak od 770 sličnih motornih nesreća koje su se pojavile na površinama Los Anđelesa u 1976 i 1977. Svaka nesreća je klasifikovana prema težini ozljede glave koju je doživio vozač motora. Klasifikacija koja je korištena je sljedeća

Klasifikacija nesreće	Tumačenje
0	Nema povrede glave
1	Skroz mala povreda glave
2	Umjerena povreda glave
3	Ozbiljno, nije životno-opasno
4	Ozbiljno i životno-opasno
5	Kritično, preživjeli se nesjeća vremena nesreće
6	Fatalno

U 331 nesreći vozač je nosio kacigu, dok u ostalih 439 nesreća nije. Sljedeća tabela frekvencija daje težinu nesreća koje su se dogodile sa ili bez kacige.

Klasifikacija	Frekvencija vozača sa kacigom	Frekvencija vozača bez kacige
0	248	227
1	58	135
2	11	33
3	3	14
4	2	3
5	8	21
6	1	6
	331	439

Odrediti sredinu uzorka klasifikacija težine ozljede glave za one vozače koji su nosili i koji nisu nosili kacigu.

Rješenje:

Sredina uzorka za one koji su nosili kacigu je

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 284 + 1\cdot 58 + 2\cdot 11 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 8 + 6\cdot 1}{331} = \frac{143}{331} = 0,432$$

Sredina uzorka za one koji nisu nosili kacigu je

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 227 + 1\cdot 135 + 2\cdot 33 + 3\cdot 14 + 4\cdot 3 + 5\cdot 21 + 6\cdot 6}{439} = \frac{396}{439} = 0,902$$

Prema tome podaci pokazuju da su oni motoristi koji su nosili kacige, u prosjeku, doživjeli mnogo manje povreda glave u poređenju sa onim koji su nosili kacige.

Zadaci za vježbu

1. Sljedeći podaci predstavljaju bodove sa ispita iz predmeta statistika na nekom uzorku studenata:

87, 63, 91, 72, 80, 77, 93, 69, 75, 79, 70, 83, 94, 75, 88

Kolika je sredina uzorka?

2. Sljedeći podaci predstavljaju godišnji prosjek padavina po centimetru i prosječan broj dana padavina u uzorku gradova

Grad	Prosječna količina padavina	Prosječan broj dana
Travnik	35,74	134
Brčko	31,50	83
Bihać	11,43	95
Mostar	15,31	88
Zenica	19,59	100
Tuzla	44,76	105
Banja Luka	47,29	127
Sarajevo	12,08	36
Bosanska Krupa	57,55	129
Bosanska Gradiška	59,74	114
Bosanski Brod	36,30	154
Doboj	29,13	81
Bugojno	28,61	85

(a) Pronaći sredinu uzorka prosječnog broja centimetara padavina

(b) Pronaći sredinu uzorka prosječnog broja dana padavina

(3.) Sredina uzorka težina odraslih žena grada A je veća od sredine uzorka težina odraslih žena grada B. Štaviše, sredina uzorka težina odraslih muškaraca grada A je veća od sredine uzorka težina odraslih muškaraca grada B. Možemo li zaključiti da je sredina uzoraka težina odraslih u grada A veća od sredine uzoraka težina odraslih grada B? Obrazložiti vaš odgovor.

(4.) Pronaći sredinu uzoraka za ovaj skup podataka

1, 2, 4, 7, 10, 12

Sad pronaći sredinu uzoraka za ove skupove

3, 6, 12, 21, 30, 36 ; 6, 7, 9, 12, 15, 17

(5.) Sljedeći podaci prikazuju ukupan broj požara u Moskvi, po mjesecima iz 2002:

6, 13, 5, 7, 7, 3, 7, 2, 5, 6, 9, 8

Odrediti sredinu uzorka ovog skupa podataka

(6.) Jedna polovina vrijednosti uzoraka je jednaka 10, a druga polovina je jednaka 20. Kolika je sredina uzorka?

(7.) Pola vrijednosti uzorka je jednako 10, jedna šestina je jednaka 20, i jedna trećina je jednaka 30. Kolika je sredina uzorka?

Odgovori:

(1.) $\frac{1196}{15} = 79,73$

(2.) $\frac{429,03}{13} = 33,00$ cm ; $\frac{1331}{13} = 102,38$ dana

(3.) NE. Također zavisi od postotka populacije iz dva grada koje su žene. (Npr., pretpostavimo da grad A ima 9 žena čiji je prosjek težina 110 i 1 muškarca čija je težina 200, dok grad B ima 10 žena čiji je prosjek 100 i 10 muškaraca čiji je prosjek težina 190.)

(4.) 6; 18; 11

(5.) $\frac{78}{11}$

(6.) 15

(7.) $\frac{1}{2}(10) + \frac{1}{6}(20) + \frac{1}{3}(30) = 18,33$

Medijana uzorka

Sljedeći podaci predstavljaju broj sedmica, koji je uzorak od sedam ljudi potrošilo na dobijanje vozačke dozvole, nakon završetka kursa učenja-vožnje:

$$2,\ 110,\ 5,\ 7,\ 6,\ 7,\ 3$$

Sredina uzorka ovog skupa podataka je $\bar{x} = \frac{140}{7} = 20$; i primijetimo da je šest od sedam datih podataka mnogo manji od sredine uzorka, dok je sedmi mnogo veći. Ova činjenica nam ukazuje na slabost sredine uzorka u pokušaju da identifikuje centar skupa podataka – naime, njena vrijednost uveliko zavisi od ekstremnih vrijednosti podataka.

Statistika koja se također koristi za identifikovanje centra skupa podataka ali na koju ne utiču ekstremne vrijednosti se naziva <u>medijana uzorka</u>, definisana kao srednja vrijednost kada su podaci poredani od manjoj ka većoj vrijednosti. Medijanu uzorka ćemo obilježavati sa m.

<u>Definicija</u> Poredajte vrijednosti podataka od manje ka većoj vrijednosti. Ako je broj podataka neparan, tada je medijana uzorka srednja vrijednost uređene liste; ako je

parna, tada je medijana uzorka prosjek dvije srednje vrijednosti.

Iz definicije slijedi da ako postoje tri vrijednosti podataka, tada je medijana uzorka druga najmanja vrijednost; a ako postoje četri vrijednosti, tada je prosjek druge i treće-najmanje vrijednosti.

(#) Sljedeći podaci predstavljaju broj sedmica koje je 7 osoba trebalo za dobijanje vozačke dozvole.

2; 110; 5; 7; 6; 7; 3

Pronađi medijanu uzorka.

Rj. Prvo poredajmo podatke u rastućem poretku

2, 3, 5, 6, 7, 7, 110

Kako je veličina uzorka 7, slijedi da je medijana uzorka četvrta najmanja vrijednost. Tj., medijana uzorka broja sedmica koje je trebalo za dobijanje vozačke dozvole je $m=6$ sedmica.

(#) Sljedeći podaci predstavljaju broj dana koje je 6 osoba trebalo za prestanak pušenja, nakon završenog kursa dizajniran za ovu namjenu.

1, 2, 3, 5, 8, 100

Odrediti medijanu uzorka.

Rj. Kako je uzorak veličine 6, medijana uzorka je prosjek srednje dvije vrijednosti, time

$$m = \frac{3+5}{2} = 4 .$$

Tj. medijana uzorka je 4 dana.

U opštem slučaju, za skup podataka od n vrijednosti, medijana uzorka je $\frac{n+1}{2}$ najmanja vrijednost kada je n neparno ili prosjek od $\frac{n}{2}$-najmanje vrijednosti i $(\frac{n}{2}+1)$-najmanje vrijednosti kada je n parno.

Obe statistike, i sredina uzorka i medijana uzorka, su korisne za opisivanje centra tendencije (težnje) skupa podataka. Sredina uzorka, s obzirom da je aritmetički prosjek, koristi sve vrijednosti podataka. Medijana uzorka, koja koristi samo jednu srednju vrijednost, ne zavisi od ekstremnih vrijednosti.

(#) Sljedeća tabela prikazuje imena NBA igrača, koji su dobili titulu šampiona u ostvarenom broju bodova, i njihov prosječan broj bodova u svakoj od sezona od 1992 do 2008.

1992-93	Michael Jordan, Chicago Bulls	32,6
1993-94	David Robinson, San Antonio Spurs	29,8
1994-95	Shaquille O'Neal, Orlando Magic	29,3
1995-96	Michael Jordan, Chicago Bulls	30,4
1996-97	Michael Jordan, Chicago Bulls	29,6
1997-98	Michael Jordan, Chicago Bulls	28,7
1998-99	Allen Iverson, Philadelphia 76ers	26,8
1999-00	Shaquille O'Neal, L.A. Lakers	29,7
2000-01	Allen Iverson, Philadelphia 76ers	31,1
2001-02	Allen Iverson, Philadelphia 76ers	31,4
2002-03	Tracy McGrady, Orlando Magic	32,1
2003-04	Tracy McGrady, Orlando Magic	28,0
2004-05	Allen Iverson, Philadelphia 76ers	30,7
2005-06	Kobe Bryant, L.A. Lakers	35,4
2006-07	Kobe Bryant, L.A. Lakers	31,6
2007-08	Labron James, Cleveland Cavaliers	30,0
2008-09	Dwyane Wade, Miami Heat	30,2

a) pronaći medijanu uzorka prosječnih rezultata;

b) pronaći sredinu uzorka prosječnih rezultata.

Rj. (a) Kako postoji 17 vrijednosti podataka, medijana uzorka je deveti najmanji broj. Prema tome medijana uzorka je $m = 30{,}2$.

(b) Suma svih 17 vrijednosti je 517,4, pa je sredina uzorka

$$\bar{x} = \frac{517{,}4}{17} \approx 30{,}435.$$

Zadaci za vježbu

1. Data je metraža uzorka od 12 gradska golf terena

7 040, 6 620, 6 050, 6 300, 7 170, 5 990, 6 330, 6 780, 6 540, 6 690, 6 200, 6 830

(a) Pronaći medijanu uzorka

(b) Pronaći sredinu uzorka

2. Ako medijana za skup podataka x_i, $i=1,2,\dots,n$, iznosi 10, kolika je medijana skupa $2x_i+3$, $i=1,\dots,n$.

3. Sljedeći podaci predstavljaju omjer muških i ženskih samoubistava na 100 000 stanovnika, za važne države

Omjer samoubistava na 100 000 stanovnika

Spol	Sjedinjene države	Australia	Austria	Kanada	Danska
Žena	5,4	5,1	15,8	5,4	20,6
Muškarac	19,7	18,2	42,1	20,5	35,1

Spol	Francuska	Italija	Japan	Holandija	Poljska	Švedska	Vel. Brit.	Njem.
Žena	12,7	4,3	14,9	8,1	4,4	11,5	5,7	12,0
Muškarac	33,1	11,0	27,8	14,6	22,0	25,0	13,1	26,6

(a) Pronaći medijanu uzorka omjera muških samoubistava

(b) Pronaći medijanu uzorka omjera ženskih samoubistava

(c) Pronaći sredinu uzorka omjera muških samoubistava

(d) Pronaći sredinu uzorka omjera ženskih samoubistava

4. Dat je postotak radnika ženskog spola za 14 profesija

Profesija	Postotak žena
Izvršni direktor	36,8
Sestre	94,3
Nadzornik prodaje	30,5
Radnik prodaje	68,6
Vatrogasac	1,9
Čistač	41,5
Građevinski radnik	2,8

Profesija	Postotak žena
Doktor	17,6
Advokat	18,0
Učitelj u OŠ	85,2
Poštanski službenik	43,5
Policajac	10,9
Nadzornik gradnje	1,6
Vozač kamiona	2,1

Za ove postotke pronaći

(a) sredinu uzorka

(b) medijanu uzorka

Ispostavi se da žene sačinjavaju 44,4 posto ukupnih radnika za ove profesije. Da li je ovo saglasno sa vašim odgovorima pod (a) i (b)? Objasniti!

Odgovori:

1. (a) 6 580 (b) 6 545 metra

2. 23

3. (a) 22,0 (b) 8,1 (c) 23,68 (d) 9,68

4. (a) 32, 52
(b) 24,25

Postotak uzorka

Medijana uzorka je specijalni tip statistike koji je poznat kao <u>100p postotak uzorak</u>, gdje je p neki racionalan broj između 0 i 1. Slobodno govoreći, 100p postotak uzorak je vrijednost k takva da 100p posto vrijednost podataka je manje od k, a 100(1-p) posto vrijednosti je veće od k.

<u>Definicija</u> 100p postotak uzorak je vrijednost iz podataka koja ima osobinu da je najmanje 100p posto podataka manje ili jednako ovoj vrijednosti i najviše 100(1-p) postotaka vrijednosti podataka su veće ili jednake ovoj vrijednosti. Ako dvije vrijednosti imaju ovu osobinu, tada je 100p postotak uzorak aritmetička sredina ovih vrijednosti.

Primjetimo da je medijana uzorka u stvari 50ti postotak uzorka. To jest, 100p postotak uzorak kada je $p=\frac{1}{2}$.

Da bi odredili 100p postotak uzorka za skup podataka veličine n, radimo sljedeće:

1. poredamo podatke u rastućem poretku
2. ako np nije cijeli, odredimo najmanji cijeli veći od np. Vrijednost podatka na toj poziciji je 100p postotak uzorka.
3. Ako je np cijeli broj, tada je prosjek vrijednosti na pozicijama np i np+1 100p postotak uzorka.

(#) Koje vrijednosti podataka su 90-ti postotak uzorka kada je uzorak veličine

(a) 8;
(b) 16;
(c) 100?

Rj.

(a) Kako je $0{,}9 \cdot 8 = 7{,}2$ i nije cijeli, slijedi da ako podatke poredamo od najmanje do najveće vrijednosti, tada će vrijednost 90-tog postotka uzorka biti 8-ma najmanja vrijednost (tj. najveća vrijednost).

(b) Kako je $0{,}9 \cdot 16 = 14{,}4$, što nije cijeli broj, slijedi da je 90-ti postotak uzorka 15-ta najmanja vrijednost.

(c) Kako je $0{,}9 \cdot 100 = 90$ cijeli broj, vrijednost za 90-ti postotak uzorka je prosječna vrijednost 90-te i 91-ve vrijednosti podataka koji su poredani od manje ka većoj vrijednosti.

(#) Sljedeći brojevi predstavljaju primljene donacije 20 najboljih Univerziteta u svijetu:

25 473 721, 15 224 900, 12 205 000, 11 610 997, 11 206 500, 6 712 436, 5 221 916, 5 190 564, 4 963 878, 4 931 338, 4 376 272, 4 369 782, 4 268 415, 4 215 275, 4 137 494, 3 826 153, 3 777 092, 3 650 224, 3 611 127, 3 219 098

Koristeći ove podatke odrediti

(a) 90-ti postotak uzorka

(b) 20-ti postotak uzorka

Rj.

(a) Kako je uzorak veličine 20 i $20 \cdot 0{,}9 = 18$, 90-ti postotak uzorka je prosječna vrijednost 18-te i 19-te najmanje vrijednosti. Ekvivalentno, to je prosjek 2-ge i 3-će najveće vrijednosti. Time,

$$90\text{-ti postotak uzorka} = \frac{15\,224\,900 + 12\,205\,000}{2} = 13\,714\,950$$

Tj. 90-ti postotak uzorka ovog skupa podataka je približno 13,7 miliona.

(b) Kako je $20 \cdot 0{,}2 = 4$, 20-ti postotak uzorka je prosjek 4-te i 5-te najmanje vrijednosti, što daje rezultat

$$20\text{-ti postotak uzorka} = \frac{3\,777\,092 + 3\,826\,153}{2} = 3\,801\,623.$$

Zadaci za vježbu

1. Sedamdeset-pet vrijednosti je poredano u rastućem poretku. Kako bi odredili uzorke
(a) 80 postotne
(b) 60 postotne
(c) 30 postotne
za ovaj skup podataka.

2. Posmatrajmo skup od n vrijednosti $1, 2, 3, \ldots, n$. Odrediti vrijednost 95-tog postotka uzorka kada je
(a) $n = 100$
(b) $n = 101$

3. Sljedeće vrijednosti predstavljaju broj zubara na 100 000 stanovnika u 12 evropskih država u 2000

56, 48, 61, 64, 70, 70, 60, 55, 55, 54, 71, 52.

Odrediti
(a) 90-ti postotak uzorka
(b) 50-ti postotak uzorka
(c) 10-ti postotak uzorka

4. Pretpostavimo da 100p postotni uzorak skupa podataka iznosi 230. Ako pomnožimo svaku vrijednost podatka sa pozitivnom konstantom c, kolika je nova vrijednost 100p postotnog uzorka.

5. Medijana simetričnog skupa podataka iznosi 40 a njegove tri četvrtine su jednake 55. Kolika je vrijednost prve četvrtine

Odgovori:

1. (a) Ako su podaci poredani u rastućem poretku, tada je 80 postotni uzorak dat kao prosjek vrijednosti na 60 i 61 vrijednosti.

(b) Ako su podaci poredani u rastućem poretku, tada je 60 postotni uzorak jednak prosječnim vrijednostima koje se nalaze na 45 i 46 poziciji.

(c) Ako su podaci poredani u rastućem poretku, tada je 30 postotni uzorak vrijednost na poziciji 23.

2. (a) 95,5

(b) 96

3. (a) 70

(b) 58

(c) 52

4. 230c

5. 25

Mod uzorka

Još jedan indikator za centar tendencije je mod uzorka, koji je definisan kao vrijednost podatka koji ima najveću frekvenciju u skupu podataka.

\# Sljedeći podaci predstavljaju veličine 8 haljina koje su prodane u ženskom butiku

8, 10, 6, 4, 10, 12, 14, 10

Koliki je mod uzorka?

R: Mod uzorka je 10, zato što se 10 pojavljuje najviše puta. ☒

Ako ne postoji samo jedna vrijednost sa najvećom frekvencijom, tada sve vrijednosti koje imaju najveću vrijednost se nazivaju modalne vrijednosti. U takvim situacijama kažemo da ne postoji jedinstvena vrijednost koja je mod uzorka.

\# Broj godina šestero djece iz obdaništa su

2, 5, 3, 5, 2, 4

Kolike su modalne vrijednosti ovog skupa podataka.

Rj. Kako godine 2 i 5 imaju najveću frekvenciju, oba broja, 2 i 5 su modalne vrijednosti

\# Sljedeća tabela frekvencija daje vrijednosti koje su dobijene u 30 bacanja kockice

Vrijednost	Frekvencija
1	6
2	4
3	5
4	8
5	3
6	4

Za date podatke odrediti
(a) Mod uzorka
(b) Medijanu uzorka
(c) Srednju uzorka

Rj.
(a) Kako se vrijednost 4 pojavljuje sa najvećom frekvencijom, mod uzorka je 4.

(b) Kako postoji 30 vrijednosti, medijana uzorka je prosjek 15te i 16te najmanje vrijednosti. Kako je 15ta najmanja vrijednost 3 a 16ta najmanja vrijednost 4, medijana uzorka je 3,5.

(c) Medijana uzorka je

$$\overline{x} = \frac{1\cdot 6+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 8+5\cdot 3+6\cdot 4}{30} = \frac{100}{30} \approx 3{,}333$$

Zadaci za vježbu

1. Svakoj tvrdnji sa lijeve strane kolone nađite odgovarajući skup podataka na desnoj strani kolone

1. Mod uzorka je 9
2. Sredina uzorka je 9
3. Medijana uzorka je 9

A: 5, 7, 8, 10, 13, 14
B: 1, 2, 5, 9, 9, 15
C: 1, 2, 9, 12, 12, 18

2. Konstruišite skup podataka za koji je sredina uzorka 10, medijana uzorka 8 i mod uzorka 6.

3. Džoger koristi traku dužine četvrtine kilometra koja se nalazi oko sportskog terena. U uzorku od 17 džogera, 1 je napravio 2 kruga, 4ca su napravila 4 kruga, 5ih je napravilo 6 krugova, 6 je napravilo 8 krugova, i 1 je napravio 12 krugova.

(a) Koliki je mod uzorka broja krugova koji su napravili (istrčali) ovi džogeri

(b) Koliki je mod uzorka udaljenosti koji su pretrčali ovi džogeri

Odgovori

1. 1B, 2C, 3A

2. (a) 126
(b) 102, 110, 114
(c) 196

3. (a) 8 krugova (b) 2 kilometra

Namjena ovih zadataka, datih na papiru, je da na času studenti ne budu opterećeni pisanjem teksta zadatka nego **da se koncentrišu na** njihova **rješenje** (kao i da **postavljaju pitanja** kako u vezi postavke zadataka tako i za rješenja). Često samim pisanjem teksta zadatka dovodi do zamora i gubitka koncentracije studenta. Neki zadaci sa papira će namjerno biti ostavljeni studentima za vježbu – pripremiti jednu oblast iz Matematike za ispit nije moguće ako samostalno ne uradite određen broj primjera. **Sva rješenja zadataka možete pogledati u svesci sa vježbi** iz predmeta „Inžinjerska matematika III", koju možete skinuti sa stranice *pf.unze.ba\nabokov*. U svesci se nalaze i neki zadaci koji nisu na ovom papiru, kao i sav dio teorije koja pomaže puno boljem razumijevanju gradiva. Razmislite: **Površnost razumijevanja je majka neuspjeha.**

Nastavak lekcije: Korištenje statistike za sumiranje podataka

Varijansa (ili disperzija) uzorka i standardna devijacija uzorka

1. Odrediti varijansu sljedećeg skupa podataka
   1, 2, 5, 6, 6
2. Odrediti varijansu uzorka sljedećeg skupa
   -40, 0, 5, 20, 35
3. Sljedeći podaci prikazuju broj dnevnih prodanih sladoleda ulično prodavača u zadnjih 10 dana
   164, 165, 157, 164, 152, 147, 148, 131, 147, 155
   Odrediti varijansu uzorka broja prodanih sladoleda u 10 dana.
4. Odrediti standardnu devijacju uzorka podataka datih u prethodna tri zadatka.
5. Naći sredinu uzorka i standardnu devijaciju uzorka mase 100 studenata čiji je raspon frekvencija data u tabeli

masa (kg)	[60,62)	[62,66)	[66,68)	[68,72)	[72,74)	
broj studenata m_i	5	18	42	27	8	$\sum = 100$

Raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka

6. Dat je sljedeći uzorak podataka
   93, 88, 80, 68, 55
   Odrediti standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka.

7. Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka datih u tabeli

Početna plata	Frekvencija
47	4
48	1
49	3
50	5
51	8
52	10
53	0
54	5
55	0
56	2
57	3
60	1

8. Naći rapon podataka datih u tabeli

klasa	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)	
frekvencija	5	13	11	7	6	$\sum = 42$

9. Najveća vrijednost dobijena u 40 mjerenja je 7,32 kg. Ako je raspon 0,37 kg, naći najmanju vrijednost.

Koeficijent korelacije uzorka

10. Sljedeća tabela daje BH konzumaciju bijelog mlijeka (x) i nisko-kaloričnog mlijeka (y) u tri različite godine

	Konzumiranje po glavi stanovnika (na 10 litara)		
	1980	1984	1988
Bijelo mlijeko (x)	17,1	14.7	12,8
Nisko-kalorično mlijeko (y)	10,6	11,5	13,2

Odrediti koeficijent korelacije uzorka r za date podatke.

11. Izračunati koeficijent korelacije uzorka podataka datih u Tabeli 1, koji povezuju broj ispušenih cigara sa brojem slobodnih radikala pronađenih u plućima testirane osobe (slobodni radikal je jedan atom oksigena. Vjeruje se da je potencijalno štetan zato što je viskoko reaktivan i ima jaku tendenciju da se kombinuje sa ostalim atomima u tijelu)

Tabela 1 – Ispušene cigare i broj radikala

Broj osobe	Broj ispušenih cigara	Slobodni radikali
1	18	202
2	32	644
3	25	411
4	60	755
5	12	144
6	25	302
7	50	512
8	15	223
9	22	183
10	30	375

12. Izračunati koeficijent korelacije podataka datih Tabelom 2, koja povezuje puls osobe sa brojem godina provedenih u školi

Tabela 2 – Puls i broj godina provedenih u školi

	Osobe									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Broj godina u školi	12	16	13	18	19	12	18	19	12	14
Puls	73	67	74	63	73	84	60	62	76	71

Varijansa uzorka i standardna devijacija uzorka

(VARIJANSA ILI DISPERZIJA UZORKA)

Do sada smo pričali o statistici koja mjeri centar tedencije skupa podataka, i nismo spominjali statistike koje mjere rasprostiranje varijabli. Na primjer, iako sljedeća dva skupa podataka A i B, imaju istu sredinu uzorka i medijanu uzorka, jasno je da podaci imaju veći raspon vrijednosti u skupu B od onih iz A.

A: 1, 2, 5, 6, 6 B: −40, 0, 5, 20, 35

Jedan način za mjerenje promjenjivosti skupa podataka je da posmatramo devijaciju (odstupanje) skupa podataka od centralne vrijednosti. Najčešće korištena centralna vrijednost za ovu upotrebu je sredina uzorka. Ako su vrijednosti podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a sredina uzorka je $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ tada devijacija vrijednosti x_i od sredine uzorka iznosi $x_i - \bar{x}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definicija Varijansa uzorka, koju ćemo obilježavati sa s^2, skupa podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ čija je sredina uzorka $\bar{x}$, $\left(\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right)$ je definisana sa

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

\# Odrediti varijansu uzorka sljedećeg skupa podataka

1, 2, 5, 6, 6

Rj:

Napravimo sljedeću tabelu

x_i	1	2	5	6	6
$\bar{x}$	4	4	4	4	4
$x_i - \bar{x}$	−3	−2	1	2	2
$(x_i - \bar{x})^2$	9	4	1	4	4

Isto tako primjetimo $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1+4+25+36+36 = 102$,

$$n\bar{x}^2 = 5 \cdot 16 = 80$$

Sad imamo

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{9+4+1+4+4}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

ili

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{102-80}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

(#) Odrediti varijansu uzorka sljedećeg skupa

$$-40,\ 0,\ 5,\ 20,\ 35$$

Rj.

x_i	-40	0	5	20	35
$\bar{x}$	4	4	4	4	4
$x_i-\bar{x}$	-44	-4	1	16	31
$(x_i-\bar{x})^2$	1936	16	1	256	961

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{3170}{4}=792,5$$

ili mogli smo koristiti formulu $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1600+25+400+1225=3250$$

$$n\bar{x}^2=5\cdot 16=80$$

$$s^2=\frac{3250-80}{4}=\frac{3170}{4}=792,5$$

Pretpostavimo da smo dodali konstantu c svakoj od vrijednosti podataka $x_1, x_2, \dots, x_n$ i da smo dobili novi skup $y_1, y_2, \dots, y_n$ gdje je

$$y_i=x_i+c$$

Da bi vidjeli kako će ova vrijednost uticati na varijansu uzorka, prisjetimo se da smo pokazali da je

$$\bar{y}=\bar{x}+c$$

pa time i

$$y_i-\bar{y}=x_i+c-(\bar{x}+c)=x_i-\bar{x}$$

Time, y devijacije su jednake x devijacijama, i time njihove sume kvadrata su jednake. Prema tome pokazali smo sljedeći koristan rezultat

Varijansa uzorka ostaje nepromjenjena kada konstantu dodamo svakoj od vrijednosti podataka

Koristeći ovaj rezultat zajedno sa algebarskom jednakošću $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2$ možemo uveliko smanjiti vrijeme računanja varijanse uzorka.

(#) Sljedeći podaci daju broj dnevnih prodanih sladoleda uličnog prodavača u zadnjih 10 dana

164, 165, 157, 164, 152, 147, 148, 131, 147, 155

Odrediti varijansu uzorka broja prodanih sladoleda u ovih 10 dana.

Rj. Umjesto da radimo direktno sa datim podacima, oduzmimo vrijednost 150 od svake date vrijednosti. (Tj. dodajmo $c=-150$ na svaku vrijednost podatka). Kao rezultat ćemo dobiti novi skup podataka

14, 15, 7, 14, 2, −3, −2, −19, −3, 5

Sredina uzorka je

$$\overline{Y} = \frac{14+15+7+14+2-3-2-19-3+5}{10} = 3$$

Suma kvadrata novih podataka je

$$\sum_{i=1}^{10} Y_i = 14^2+15^2+7^2+14^2+2^2+3^2+2^2+19^2+3^2+5^2 = 1078$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} \overline{Y}_i^{\,2} - n\overline{Y}^2}{n-1} = \frac{1078-90}{9} = \frac{988}{9} \approx 109,78$$

Pozitivni kvadratni korijen varijanse uzorka nazivamo <u>standardna devijacija uzorka.</u>

<u>Definicija</u> Vrijednost s, definisana sa

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$$

se zove standardna devijacija uzorka.

Jedinica standardne devijacije je ista kao i orginalni podaci. To jest, na primjer, ako su podaci u metrima, tada varijansa uzorka je izražena u metrima na kvadrat, a jedine standardne devijacije uzorka su metri.

(#) Odrediti standardnu devijaciju uzorka prethodna tri zadatka.

(#) Nađi sredinu uzorka i standardnu devijaciju uzorka mase 100 studenata čiji je raspon frekvencija dat u tabeli:

masa (kg)	[60, 62)	[62, 66)	[66, 68)	[68, 72)	[72, 74)	
broj studenata m_i	5	18	42	27	8	$\sum = 100$

Rj. Za x_i ćemo uzeti sredine intervala. Slijedi

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(5\cdot 61 + 18\cdot 64 + 42\cdot 67 + 27\cdot 70 + 8\cdot 73) = \frac{6745}{100} = 67{,}45 \text{ kg}$$

Varijansu uzorka možemo odrediti pomoću formule

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-\overline{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 - n\overline{x}^2}{n-1}$$

Formiramo tabelu

masa (kg)	sredina x_i klasa	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$	frekvencije m_i	$m_i(x_i-\overline{x})^2$
[60, 62)	61	−6,45	41,6025	5	208,0125
[62, 66)	64	−3,45	11,9025	18	214,2450
[66, 68)	67	−0,45	0,2025	42	8,5050
[68, 72)	70	2,55	6,5025	27	175,5675
[72, 74)	73	5,55	30,8025	8	246,4200

$$\sum m_i(x_i-\overline{x})^2 = 852{,}75 \qquad s = \sqrt{\frac{852{,}75}{99}} \approx 2{,}9349$$ standardna devijacija uzorka

Da smo koristili drugu formulu, imali bi

$$\sum m_i x_i^2 = 455\,803, \quad n\overline{x}^2 = 454\,950, \quad s = \sqrt{\frac{853}{99}} \approx 2{,}9353$$

Raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka

Posmatrajmo uzorak veličine n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Raspon uzorka obilježavamo sa R i definišemo kao

$$R = \max_{1\le k\le n} x_k - \min_{1\le k\le n} x_k$$

Interkvartilni raspon uzorka definišemo kao razliku između 75. i 25-tog postotka uzorka.

Prisjetimo se da ako je npr. uzorak veličine 20 tada da bi pronašli 75-ti postotak uzorka računamo vrijednost

$$0{,}75\cdot 20$$

pa na osnovu ove vrijednosti uzimamo odgovarajući broj (vidi lekciju Postotak uzorka)

(#) Da je sljedeći uzorak podataka

93, 88, 80, 68, 55

Odrediti standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka.

Rj.

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$ standardna devijacija

$$\bar{x}=\frac{93+88+80+68+55}{5}=76{,}8$$

x_i	93	88	80	68	55
$\bar{x}$	76,8	76,8	76,8	76,8	76,8
$x_i-\bar{x}$	16,2	11,2	3,2	-8,8	-21,8
$(x_i-\bar{x})^2$	262,44	125,44	10,24	77,44	475,24

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=950{,}8 \qquad s=\sqrt{\frac{950{,}8}{4}}=\sqrt{237{,}7}\approx 15{,}4175$$ standardna devijacija

raspon uzorka $R=93-55=38$

$0{,}75\cdot 5=3{,}75 \Rightarrow$ 75.ti postotak uzorka je 88

$0{,}25\cdot 5=1{,}25 \Rightarrow$ 25.ti postotak uzorka je 68

Interkvartilni raspon uzorka je 20.

(#) Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka datih u tabeli:

Početna plata	Frekvencija
47	4
48	1
49	3
50	5
51	8
52	10
53	0
54	5
55	0
56	2
57	3
60	1

Rj.

$4+1+3+5+8+10+0+5+2+3+1=42$ Suma frekvencija je 42

$$\bar{x}=\frac{47\cdot 4+48+49\cdot 3+50\cdot 5+51\cdot 8+52\cdot 10+54\cdot 5+56\cdot 2+57\cdot 3+60\cdot 1}{42}$$

$$=\frac{2174}{42}=\frac{1087}{21}\approx 51{,}7619$$ sredina uzorka

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}}{n-1}$$ varijansa uzorka

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=4\cdot 47^2+1\cdot 48^2+\ldots+1\cdot 60^2=13102$$

$$s^2=\frac{13102-42\cdot\frac{1087}{21}}{41}=\frac{10928}{41}\approx 266{,}5366$$

$s=16{,}3259$ standardna devijacija uzorka

Plate se kreću od 47 do 60. Raspon uzorka je

$$R = 60 - 47 = 13$$

Odredimo još interkvartilni raspon.

$0{,}25 \cdot 42 = 10{,}5$ nije cijeli broj $\Rightarrow$ treba nam 11 najmanja vrijednost na listi.

25ti postotak uzorka je 50

$0{,}75 \cdot 42 = 31{,}5$ nije cijeli broj $\Rightarrow$ 75ti postotak uzorka je 32 najmanja vrijednost na listi tj. 54

Interkvartilni raspon uzorka je 4

Koeficijent korelacije uzorka

Definicija Neka s_x i s_y označavaju redom standardne devijacije uzoraka za x i y vrijednosti. Koeficijent korelacije uzorka, označavamo sa r, uređenih parova podataka (x_i, y_i), $i=1,2,\dots,n$ definišemo sa

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)\, s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

Kada je $r>0$, kažemo da je uzorak parova podataka pozitivne korelacije; a kada je $r<0$, kažemo da su ovi podaci negativne korelacije.

Navedimo nekoliko osobina koeficijenta korelacije uzorka:

1. Koeficijent korelacije uzorka je uvijek između -1 i 1.
2. Koeficijent korelacije uzorka r će biti jednak $+1$, ako za neku konstantu a,

$$y_i = a + b x_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

gdje je b pozitivna konstanta

3. Koeficijent korelacije uzorka će biti jednak -1, ako, za neku konstantu a,

$$y_i = a + b x_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

gdje je b negativna konstanta.

4. Ako je r koeficijent korelacije uzorka za podatke x_i, y_i,

$i=1,2,\dots,n$ tada za proizvoljne konstante a, b, c i d, r je također koeficijent korelacije uzorka podataka

$$a+bx_i, \quad c+dy_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

gdje b i d moraju biti istog znaka (tj. ako $bd \geq 0$).

Za namjere računanja, sljedeća formula za koeficijent korelacije uzorka je vrlo korisna

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2\right)}}$$

Sljedeća tabela daje BH konzumaciju bijelog mlijeka (x) i nisko-kaloričnog mlijeka (y) u tri različite godine

	Konzumacija po glavi stanovnika (10 litara)		
	1980	1984	1988
Bijelo mlijeko (x)	17,1	14,7	12,8
Nisko-kalorično mlijeko (y)	10,6	11,5	13,2

(17,1 znači da 17,1 stanovnik potroši 10 litara mlijeka)

Odrediti koeficijent korelacije uzorka r za date podatke.

Rj.

Koeficijent korelacije uzorka ostaje nepromijenjen kada se neka konstanta c_1 doda svakoj promjenjivoj x i kada se neka konstanta c_2 doda svakoj promjenjivoj y

Oduzmimo 12,8 od svake vrijednosti x i 10,6 od svake vrijednosti y. Ovo nam daje:

i	1	2	3
x_i	4,3	1,9	0
y_i	0	0,9	2,6

Želimo iskoristiti formulu

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2\right)}}$$

x_i	Y_i	x_iY_i	$\bar{x}$	$\bar{Y}$	x_i^2	Y_i^2
4,3	0	0			18,49	0
1,9	0,9	1,71			3,61	0,81
0	2,6	0			0	6,76
$\sum$		1,71			22,10	7,57

$$\bar{x} = \frac{4,3+1,9+0}{3} = 2,0667, \qquad \bar{x}^2 = 4,2712$$

$$\bar{Y} = \frac{0+0,9+2,6}{3} = 1,1667, \qquad \bar{Y}^2 = 1,3612$$

$$\bar{x}\bar{Y} = 2,4112$$

$$r = \frac{1,71 - 3\cdot 2,4112}{\sqrt{(22,10 - 3\cdot 4,2712)(7,57 - 3\cdot 1,3612)}} \approx -0,97$$

Prema tome naša tri podatka daju veoma jaku negativnu korelaciju između konzumacije bijelog i niskokaloričnog mlijeka.

Izračunajmo koeficijent korelacije bez dodavanja konstanti.

x_i	Y_i	x_iY_i	x_i^2	Y_i^2
17,1	10,6	181,26	292,41	112,36
14,7	11,5	169,05	216,09	132,25
12,8	13,2	168,96	163,84	174,24
$\sum$		519,27	672,34	418,85

$$\bar{x} = 14,8667, \quad \bar{Y} = 11,7667, \quad \bar{x}^2 = 221,0178, \quad \bar{Y}^2 = 138,4544, \quad \bar{x}\bar{Y} = 174,9311$$

$$r = \frac{519,27 - 3\cdot 174,9311}{\sqrt{(672,34 - 3\cdot 221,0178)(418,85 - 3\cdot 138,4544)}} \approx -0,97$$

Izračunati koeficijent korelacije uzorka podataka datih u Tabeli 1, koji povezuju broj ispušenih cigara sa brojem slobodnih radikala pronađenih u plućima osobe (slobodni radikal je jedan atom oksigena. Vjeruje se da je potencijalno štetan zato što je visoko reaktivan i ima jaku tendenciju da se kombinuje sa ostalim atomima u tijelu)

Tabela 1 - Ispušene cigare i broj radikala

Broj osobe	Broj ispušenih cigara	Slobodni radikali
1	18	202
2	32	644
3	25	411
4	60	755
5	12	144
6	25	302
7	50	512
8	15	223
9	22	183
10	30	375

Rj:
Broj parova je 10. Parovi koje posmatramo su sljedeći 18 ; 202, 32 ; 644, 25 ; 411, 60 ; 755, 12 ; 144, 25 ; 302, 50 ; 512, 15 ; 223, 22 ; 183, 30 ; 375.

Od x-eva ćemo oduzeti 12 a od y-na 144.

x_i	6	20	13	48	0	13	38	3	10	18
Y_i	58	500	267	611	0	158	368	79	39	231
x_iY_i	348	10000	3471	29328	0	2054	13984	237	390	4158
x_i^2	36	400	169	2304	0	169	1444	9	100	324

Y_i^2 3364 250000 71289 373321 0 24964 135424 6241 1521 53361

$\overline{X} = 16,9$ $\qquad$ $\overline{Y} = 231,1$ $\qquad$ $\overline{XY} = 3905,59$

$\overline{X}^2 = 285,61$ $\qquad$ $\overline{Y}^2 = 53407$

$\sum x_i Y_i = 63970$ $\qquad$ $\sum x_i^2 = 4955$ $\qquad$ $\sum Y_i^2 = 919485$

$n = 10$

$$r = \frac{63970 - 39055,9}{\sqrt{(4955 - 2856,1)(919485 - 534070)}} \approx 0,8760$$

(#) Izračunati koeficijent korelacije podataka datih tabelom 2, koja povezuje puls osobe sa brojem godina provedenih u školi.

Tabela 2 – Puls i broj godina provedenih u školi

	Osobe									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Broj godina u školi	12	16	13	18	19	12	18	19	12	14
Puls	73	67	74	63	73	84	60	62	76	71

Rj: Parovi su sljedeći

12 ; 73, $\quad$ 16 ; 67, $\quad$ 13 ; 74, $\quad$ 18 ; 63,
19 ; 73, $\quad$ 12 ; 84, $\quad$ 18 ; 60, $\quad$ 19 ; 62,
12 ; 76, $\quad$ 14 ; 71.

... ZA VJEŽBU ...

Koeficijent korelacije uzorka je −0,763803

Velika negativna vrijednost korelacije uzorka nam kazuje da, za posmatrani skup podataka, visok puls možemo pridružiti malom broju godina provedenih u školi, a nizak puls teži velikom broju godina provedenih u školi.

Prvi zadatak za zadaću - Lekcije: Opisivanje skupova podataka i korištenje statistike za sumiranje podataka

1. Sljedeći podaci (u hiljadama konvertibilnih maraka) predstavljaju godišnji dohodak od uzorka poreznih obveznika:
   47, 55, 18, 24 27, 41, 50, 38, 33, 29, 15, 77, 64, 22, 19, 35, 39, 41
   Grafički prikazati ovaj skup podataka pomoću histograma frekvencija koji će imati 5 intervala. Odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, 30ti postotak uzorka, varijansu uzorka, standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka. Naći empirijsku funkciju raspodjele i nacrtati njen grafik. Nacrtati relativni poligon frekvencija i kumulativu. Napraviti prikaz datih podataka pomoću stabljika i listova.

2. Sljedeći podaci (u hiljadama konvertibilnih maraka) predstavljaju godišnja primanja uzorka zaposlenika firme Apple:
   67, 55, 121, 77, 80, 34, 41, 48, 60, 30, 22, 28, 84, 55, 26, 105, 62
   Grafički prikazati ovaj skup podataka pomoću histograma frekvencija koji će imati 6 intervala. Odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, 60ti postotak uzorka, varijansu uzorka, standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka. Naći empirijsku funkciju raspodjele i nacrtati njen grafik. Nacrtati relativni poligon frekvencija i kumulativu. Napraviti prikaz datih podataka pomoću stabljika i listova.

3. Sljedeći podaci (u kilogramima) predstavljaju količinu prodanog pečenog kestena uličnog prodavača u uzorku od 17 dana:
   30, 17, 23, 31, 28, 56, 64, 88, 104, 115, 39, 25, 18, 21, 30, 57, 40
   Grafički prikazati ovaj skup podataka pomoću histograma frekvencija koji će imati 7 intervala. Odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, 20ti postotak uzorka, varijansu uzorka, standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka. Naći empirijsku funkciju raspodjele i nacrtati njen grafik. Nacrtati relativni poligon frekvencija i kumulativu. Napraviti prikaz datih podataka pomoću stabljika i listova.

4. Sljedeći podaci predstavljaju količinu pari prodane obuće firme Astra u uzorku od 18 dana:
   38, 29, 19, 46, 40, 49, 72, 70, 37, 39, 18, 22, 29, 52, 94, 86, 23, 36
   Grafički prikazati ovaj skup podataka pomoću histograma frekvencija koji će imati 4 intervala. Odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, 40ti postotak uzorka, varijansu uzorka, standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka. Naći empirijsku funkciju raspodjele i nacrtati njen grafik. Nacrtati relativni poligon frekvencija i kumulativu. Napraviti prikaz datih podataka pomoću stabljika i listova.

5. Dat je uzorak mase 100 studenata druge godine Politehničkog fakulteta

masa (kg)	[60,61)	[61,65)	[65,67)	[67,71)	[71,73)	
broj studenata m_i	6	19	43	28	4	$\sum = 100$

   Grafički prikazati ovaj skup podataka pomoću linijskog grafa. Odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, 90ti postotak uzorka, varijansu uzorka, standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka. Naći empirijsku funkciju raspodjele i nacrtati njen grafik. Nacrtati relativni poligon frekvencija i kumulativu. Napraviti prikaz datih podataka pomoću stabljika i listova.

6. Podaci nekog istraživanja su prikazani pomoću sljedeće tabele

Početna plata	Frekvencija
40	5
41	2
42	3
53	6
54	9
55	11
56	1
57	6
58	1
59	3
50	4
51	2

   Grafički prikazati ovaj skup podataka pomoću histograma frekvencija koji će imati 5 intervala. Odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, 20ti postotak uzorka, varijansu uzorka, standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka. Naći empirijsku funkciju raspodjele i nacrtati njen grafik. Nacrtati relativni poligon frekvencija i kumulativu. Napraviti prikaz datih podataka pomoću stabljika i listova.

7. Dati su sljedeći podaci

klasa	[16,21)	[21,26)	[26,31)	[31,36)	[36,41)	
frekvencija	6	14	12	8	7	$\sum = 46$

   Grafički prikazati ovaj skup podataka pomoću histograma frekvencija i linijskog grafa. Odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, 20ti postotak uzorka, varijansu uzorka, standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka. Naći empirijsku funkciju raspodjele i nacrtati njen grafik. Nacrtati relativni poligon frekvencija i kumulativu. Napraviti prikaz datih podataka pomoću stabljika i listova.

8. Podaci nekog istraživanja su prikazani pomoću sljedeće tabele

Broj komada	Frekvencija
70	15
71	21
72	13
73	61
74	19
75	11
76	11
77	16
78	11
79	13

   Grafički prikazati ovaj skup podataka pomoću histograma frekvencija koji će imati 6 intervala. Odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, 45ti postotak uzorka, varijansu uzorka, standardnu devijaciju uzorka, raspon uzorka i interkvartilni raspon uzorka. Naći empirijsku funkciju raspodjele i nacrtati njen grafik. Nacrtati relativni poligon frekvencija i kumulativu. Napraviti prikaz datih podataka pomoću stabljika i listova.

Skupovi i operacije sa skupovima

U teoriji verovatnoće, događaji su skupovi. Iz tog razloga se će često biti korišćene neke poznate osobine operacija sa skupovima.

Neka je X univerzalni skup. Za skup A kažemo da je **podskup** skupa X, u oznaci $A \subseteq X$, ako važi $x \in A \Rightarrow x \in X$. Neka su A, B i C podskupovi skupa X. Skupovne operacije su definisane sa:

unija skupova A **i** B je $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,

presek skupova A **i** B je $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,

razlika skupova A **i** B je $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$,

komplement skupa A je $\overline{A} = \{x : x \in X \wedge x \notin A\} = X \setminus A$,

Dekartov proizvod skupova A **i** B je $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Neke od osobina skupovnih operacija su:

- $\overline{\overline{A}} = A, \quad \overline{\emptyset} = X, \quad \emptyset \cup A = A, \quad \emptyset \cap A = \emptyset, \quad X \cap A = A, \quad X \cup A = X,$
- $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

---

[1] *Za* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ *i* $C = \{3, 4, 5, 6\}$ *napisati elemente skupova* $A \cap C$, $A \cup B$ *i* $B \setminus C$.

Rešenje: $A \cap C = \{3, 4\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, \quad B \setminus C = \{2, 8\}.$

---

[2] *Za* $A = \{a, b, 1\}$, $B = \{b, 1, c\}$ *i* $C = \{a, 1\}$ *napisati elemente skupova* $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$, $A \times C$ *i* $(A \cup B) \cap C$.

Rešenje: $A \cup B = \{a, b, 1, c\}$, $B \cap C = \{1\}$, $A \setminus B = \{a\}$, $B \setminus A = \{c\}$, $A \cap B = \{b, 1\}$, $A \times C = \{(a, a), (a, 1), (b, a), (b, 1), (1, a), (1, 1)\}$, $(A \cup B) \cap C = \{a, b, 1, c\} \cap \{a, 1\} = \{a, 1\}$.

---

[3] *Za date podskupove*

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ *je deljivo sa* 3 *i* $x < 10\}$ *i*

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 12$ *i* x *je prost broj*$\} \cup \{1\}$

univerzalnog skupa $\mathbb{N}$ *napisati elemente skupova* $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(B)$, B^2, $\overline{(A \cup B)} \cap C$ *i* $(A \setminus C) \cup B$.

Rešenje: Dakle, za skupove $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 6, 9\}$ i $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ je

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}, \quad B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11\}, \quad A \cap B = \{3, 6\},$

$A \cap \overline{B} = A \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, \ldots\} = \{1, 2, 4, 5\}, \quad A \cap B \cap C = \{3, 6\} \cap C = \{3\},$

$A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}, \ B \setminus A = \{9\}, \ \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{6\}, \{9\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}, \{6, 9\}, B\},$

$B^2 = B \times B = \{(3, 3), (3, 6), (3, 9), (6, 3), (6, 6), (6, 9), (9, 3), (9, 6), (9, 9)\},$

$\overline{(A \cup B)} \cap C = \{7, 8, 10, 11, 12, \ldots\} \cap C = \{7, 11\},$

$(A \setminus C) \cup B = \{4, 6\} \cup B = \{3, 4, 6, 9\}.$

[4] *Grafički ispitati koje su od sledećih jednakosti tačne:*

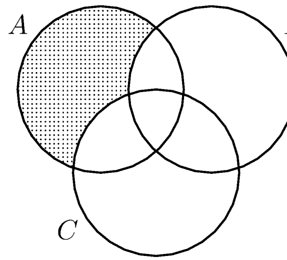
(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ (b) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

(c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ (d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(e) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$ (f) $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B$

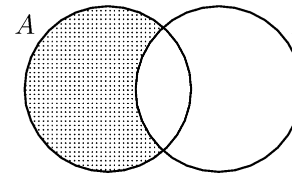
Rešenje:

(a)



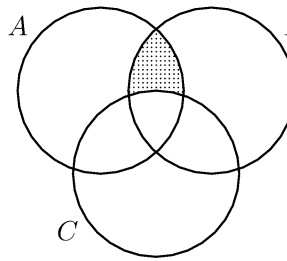
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

(b)



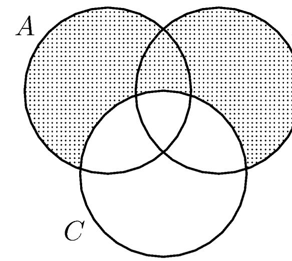
$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

(c)



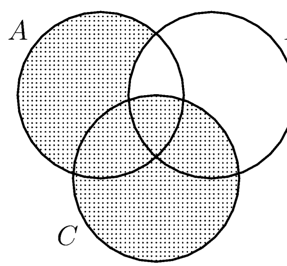
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

(d)



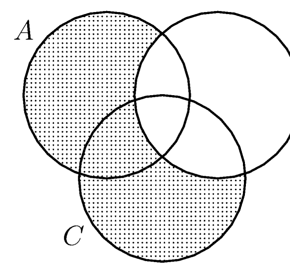
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(e)



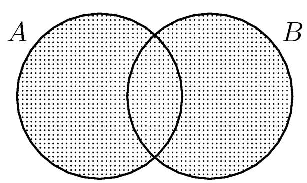
$(A \setminus B) \cup C$

$\neq$



$(A \cup C) \setminus B$

(f)



$\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B$

Namjena ovih zadataka, datih na papiru, je da na času studenti ne budu opterećeni pisanjem teksta zadatka nego **da se koncentrišu na** njihova **rješenje** (kao i da **postavljaju pitanja** kako u vezi postavke zadataka tako i za rješenja). Često samim pisanjem postavke zadatka dovodi do zamora i gubitka koncentracije studenta. Neki zadaci sa papira će namjerno biti ostavljeni studentima za vježbu – pripremiti jednu oblast iz Matematike za ispit nije moguće ako samostalno ne uradite određen broj primjera. **Sva rješenja zadataka možete pogledati u svesci sa vježbi** iz predmeta „Inžinjerska matematika III", koju možete skinuti sa stranice *http://ff.unze.ba/nabokov/*. U svesci se nalaze i neki zadaci koji nisu na ovom papiru, kao i sav dio teorije koja pomaže puno boljem razumijevanju gradiva. Jedna od poznatih latinskih izreka je: **Površnost razumijevanja je majka neuspjeha.**

Kombinatorika

Permutacije bez ponavljanja $P^n = n!$

1. Napisati sve trocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2 i 3 tako da se ni jedna od ovih cifri u napisanom broju ne ponovi.
2. Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla ni značenja, koje se mogu formirati od slova E, G, I i R tako da se svako od ovih slova može pojaviti najviše jednom u napisanoj riječi i da je svaka napisana riječ dužine 4 slova.

Permutacije sa ponavljanjem $\overline{P}^n_{k_1,k_2,\ldots,k_s} = \dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_s!}$

3. Napisati sve četverocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, i 3 gdje se samo cifra 1 u napisanom broju može pojaviti najviše dva puta.
4. Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla ni značenja, koje se mogu formirati od slova E, G i R tako da se samo slovo G ne smije pojaviti dva puta, dok se slova E i R moraju pojaviti tačno dva puta. Sve napisane riječi trebaju biti dužine 5 slova.

Kombinacije bez ponavljanja $C^n_k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

5. U kutiji se nalazi pet loptica različitih boja: crvena, bijela, plava, zelena i žuta loptica. Ako nasumice izvlačimo loptice, obrazložiti na koliko načina možemo izvući tri različite loptice.
6. Asocijaciju studenata Politehničkog fakulteta čini 7 studenata. Na koliko se različitih načina može formirati sastanak od po 5 članova kolektiva.
7. Od 10 studenata druge godine (6 muškaraca i 4 žene) 4 studenta mogu dobiti stipendiju. Na koliko načina možemo formirati grupu koja će dobiti stipendiju, ako nema nikakvih ograničenja.

Kombinacije sa ponavljanja $\overline{C^n_k} = \dbinom{n+k-1}{k}$

8. U kutiji se nalaze četiri loptice, koje trebamo obojiti u neku od vije date boje: crvenu i zelenu. Na koliko načina možemo obojiti ove četiri loptice, u zavisnosti samo od broja loptica koje su obojene u različite boje.

9. U autobusu su četiri putnika. Autobus stane na 3 različite stanice. Na koliko načina ljudi mogu izaći na ove 3 stanice, u zavisnosti samo od broja njih koji izlaze na različitim stanicama?

Varijacije bez ponavljanja $V^n_k = \dbinom{n}{k}\cdot k!$

10. Napisati sve dvocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, 3, 4 i 5 tako da se ni jedna od ovih cifri u napisanom broju ne ponovi.
11. Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla i značenja, koje se mogu formirati od slova E, K, C i R tako da se svako od ovih slova može pojaviti najviše jednom u napisanoj riječi i da je svaka napisana riječ dužine 3 slova.

Varijacije sa ponavljanja $\overline{V^n_k} = n^k$

12. Napisati sve dvocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, 3 i 4.

13. Date su cifre 3, 4, 5, 6 i 8. Koliko se neparnih trocifrenih brojeva može načiniti od tih cifara?

Razni zadaci za vježbu iz kombinatorike (rješenja pogledati u svesci)

14. Na stolu se nalazi n kuglica od kojih su dvije obilježene.
    (a) Na koliko se načina mogu poredati te kuglice tako da obilježene kuglice A i B budu jedna do druge?
    (b) Na koliko se načina mogu one poredati da A i B ne budu jedna pored druge?

15. Koja je po redu permutacija $\mathrm{STUDENT}$ u leksikografskom (abecednom) poretku načinjena od elemenata $\{\mathrm{D, E, N, S, T, T, U}\}$?

16. Na koliko se načina može rasporediti n bijelih i n crnih kuglica numerisanih brojevima $1,2,\ldots,n$, ali tako da dvije kuglice iste boje ne budu jedna pored druge?

17. Jedan rukovodilac ima 7 direktno potčinjenih radnika. Koliko on može formirati različitih sastanaka
    (a) od po 5 članova kolektiva;
    (b) i po broju i po sastavu prisutnih?

18. U lotu od 50 šina nalazi se 40 dobrih i 10 loših.
    (a) Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 šina?
    (b) Koliko se može formirati uzoraka sa 5 šina od kojih su 2 loše?

19. Pravougaonik je ispresijecan pravama paralelnim njegovim stranicama. Ako je broj pravih paralelnih jednoj njegovoj stranici m, a paralelnih drugoj stranici n, naći broj tako nastalih pravougaonika. (Na kraju rješenje primijeniti za specijalni slučaj kada je $\mathrm{m}=3$ i $\mathrm{n}=4$).

20. Sprovedena je anketa. Anketirana su 2 muškarca i 2 žene. U prostoriji je bilo 36 ljudi i to 19 muškaraca i 17 žena. Na koliko različitih načina su anketari mogli odabrati 4 anketirane osobe?

21. Koliko ima različitih voznih karata za putovanje jednom željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica?

22. Koliko ima stanica na željezničkoj pruzi, ako za razna putovanja tom prugom postoji 702 različite vozne karte?

23. Koliko se različitih petocifrenih brojeva može načiniti od cifara 0, 1, 2, 3, 4 i 5, ako:
    (a) petocifreni brojevi nisu oni koji počinju sa 0;
    (b) petocifreni brojevi počinju sa 20.

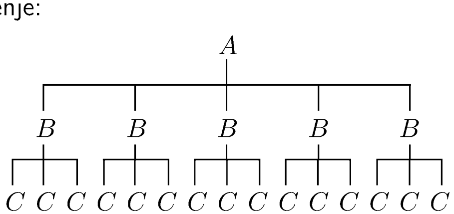
Kombinatorika

- **Binomni koeficijent**: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $(0! = 1)$
- **Pravilo proizvoda**: ako skup A_1 ima n_1 elemenata, skup A_2 ima n_2 elemenata, $\ldots$, skup A_k ima n_k elemenata, i ako se bira po jedan element iz svakog od skupova A_i pri čemu su svi posmatrani elementi različiti, ovakvih izbora ima $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.
- **Permutacije**:
  - **Permutacije bez ponavljanja**: svi elementi skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se raspoređuju u uređenu n-torku; broj ovakvih rasporeda je $\mathrm{P_n} = n!$.
  - **Permutacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ se bira n_1 puta element a_1, n_2 puta element a_2, $\ldots$, n_k puta element a_k, i izabrani elementi se svrstavaju u uređenu n-torku onim redom kojim su birani; ovakvih izbora ima $\mathrm{P^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k}} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$, gde je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.
- **Varijacije bez ponavljanja**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se $k \le n$ puta bira neki element tako da svi izabrani elementi budu različiti (prethodno izabrani elementi se ne biraju ponovo), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku ; ovakvih izbora raspoređivanja ima $\mathrm{V^n_k} = \dfrac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$.
- **Varijacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se k puta bira neki element tako da se svaki put element bira iz celog skupa A (prethodno izabrani elementi se mogu ponovo izabrati), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku ; ovakvih izbora raspoređivanja ima $\overline{\mathrm{V}}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} = n^k$.
- **Kombinacije bez ponavljanja**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se bira podskup od $k \le n$ elemenata; ovakvih podskupova ima $\mathrm{C^n_k} = \binom{n}{k}$.
- **Kombinacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se bira podskup u kome se elementi mogu ponavljati, ali tako da ukupno elemenata sa ponavljanjima bude k; ovakvih izbora ima $\overline{\mathrm{C}}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} = \binom{n+k-1}{k}$.

---

[5] *Od mesta A do mesta B vodi 5 puteva, a od mesta B do mesta C vode 3 puta. Koliko puteva vodi od mesta A do mesta C preko mesta B?*

Rešenje:



Broj puteva je $5 \cdot 3 = 15$
(vidi pravilo proizvoda, strana 3)

Kombinatorika

Permutacije bez ponavljanja

Neka je dat skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Bilo koji raspored elemenata ovog skupa, u kome se jedan element javlja samo jednom, nazivamo permutacija bez ponavljanja. Broj permutacija bez ponavljanja skupa od n elemenata obilježavamo sa P^n i računamo po formuli:

$$P^n = n!$$

\# Napisati sve trocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2 i 3 tako da se ni jedna od ovih cifri u napisanom broju ne ponovi.

R:

123
132
213
231
312
321

$$P^3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla ni značenja, koje se mogu formirati od slova E, G, I i R tako da se svako od ovih slova može pojaviti najviše jednom u napisanoj riječi, da je svaka napisana riječ dužine 4 slova.

Rj.

EGIR	GIRE	IEGR	RIGE
EGRI	GIER	IERG	RIEG
ERGI	GEIR	IGRE	REGI
ERIG	GERI	IGER	REIG
EIGR	GRIE	IREG	RGIE
EIRG	GREI	IRGE	RGEI

$$P^4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 2\cdot 12 = 24$$

Permutacije sa ponavljanjem

Neka je dat skup A od n elemenata među kojima ima k_1 jednakih jedne vrste, k_2 jednakih druge vrste, ..., k_s jednakih s-te vrste, pri čemu je $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$.

Tj.

$$A=\{\underbrace{a_1,a_1,\ldots,a_1}_{k_1 \text{ puta}},\underbrace{a_2,a_2,\ldots,a_2}_{k_2 \text{ puta}},\ldots,\underbrace{a_s,a_s,\ldots,a_s}_{k_s \text{ puta}}\}$$

Elemenata u skupu A ima n.

Bilo koji raspored koji se sastoji od svih ovih elemenata naziva se permutacija sa ponavljanjem, obilježava se sa $\overline{P}^{\,n}_{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ i broj ovih permutacija sa ponavljanjem se računa po formuli

$$\overline{P}^{\,n}_{k_1,k_2,\ldots,k_s}=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_s!}$$

Napisati sve četvorocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2 i 3 gdje se samo cifra 1 u napisanom broju može ponoviti najviše dva puta.

Rj.

1132	3121	2113
1123	3112	2131
1213	3211	2311
1231		
1312		
1321		

$$\overline{P}^{\,4}_{2,1,1}=\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2}=12$$

\# Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla ni značenja, koje se mogu formirati od slova E, G i R tako da se samo slovo G ne smije pojaviti dva puta, dok se slova E i R moraju pojaviti tačno dva puta. Sve napisane riječi trebaju biti dužine 5 slova.

Rj.

EEGRR	RRGEE	GEERR
EERGR	RREGE	GERER
EERRG	RREEG	GERRE
ERGRE	REGRE	GREER
ERGER	REGER	GRERE
ERRGE	RERGE	GRREE
ERREG	REREG	
EREGR	REEGR	
ERERG	REERG	
EGERR	RGREE	
EGRER	RGERE	
EGRRE	RGEER	

$$\overline{P}^{5}_{2,1,2} = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{4}^{1}\cdot 5}{\cancel{2}_{1}\cdot \cancel{2}_{1}} = 30$$

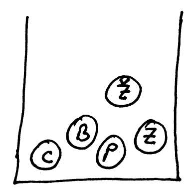
Kombinacije bez ponavljanja

Neka je dat skup od n elemenata. Svaki podskup od r elemenata ovoga skupa, gdje je $r<n$, naziva se kombinacija bez ponavljanja r-te klase od n elemenata. Broj kombinacija bez ponavljanja r-te klase od n elemenata označavamo sa C_r^n i računamo po formuli

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

\# U kutiji se nalazi pet loptica različitih boja: crvena, bijela, plava, zelena i žuta loptica. Ako nasumice izvlačimo loptice, obrazložiti na koliko načina možemo izvući tri različite loptice.

Rj.



Ako je bar jedna izvučena loptica crvene boje tada imamo sljedeće kombinacije

CBP
CBŽ
CBZ
CPŽ
CPZ
CZŽ

Ostale kombinacije su

BPZ BZŽ
BPŽ PŽZ

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}} = 10$$

Asocijaciju studenata Politehničkog fakulteta čini 7 studenata. Na koliko se različitih načina može formirati sastanak od po 5 članova kolektiva

Rj. Kako redoslijed nije bitan

$$C_5^7 = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21$$

Od 10 studenata druge godine (6 muškaraca i 4 žene) 4 studenta mogu dobiti stipendiju. Na koliko načina možemo formirati grupu koja će dobiti stipendiju, ako nema nikakvih ograničenja.

Rj. S obzirom da redoslijed nije bitan koristićemo kombinacije bez ponavljanja

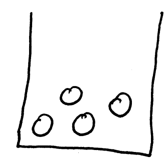
$$C_4^{10} = \binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} = \frac{10\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}^{1}\cdot 7}{\cancel{1}_{1}\cdot \cancel{2}_{1}\cdot \cancel{3}_{1}\cdot \cancel{4}_{1}} = 210$$

Grupu možemo formirati na 210 različitih načina.

<u>Kombinacije sa ponavljanjem</u> $\overline{C_k^n} = \binom{n+k-1}{k}$

U kutiji se nalaze četri loptice, koje trebamo obojiti u neku od dvije date boje: crvenu i zelenu. Na koliko načina možemo obojiti ove četri loptice, u zavisnosti samo od broja loptica koje su obojene u različite boje.

Rj.

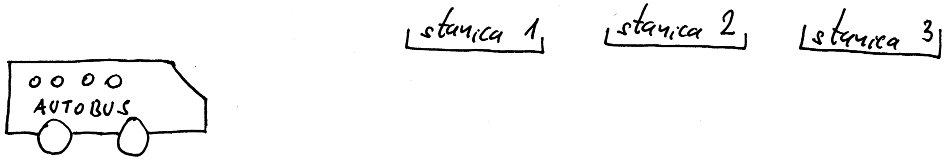


crvena	zelena	loptice
4	0	c c c c
3	1	c c c z
2	2	c c z z
1	3	c z z z
0	4	z z z z

$$\overline{C_4^2} = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

\# U autobusu su 4 putnika. Autobus stane na 3 stanice. Na koliko načina ljudi mogu izaći na ove 3 stanice, u zavisnosti samo od broja njih koji izlaze na različitim stanicama?

Rj.



stanica 1	stanica 2	stanica 3	putnici
4	0	0	1 1 1 1
3	1	0	1 1 1 2
3	0	1	1 1 1 3
2	2	0	1 1 2 2
2	1	1	1 1 2 3
2	0	2	1 1 3 3
1	3	0	1 2 2 2
1	2	1	1 2 2 3
1	1	2	1 2 3 3
1	0	3	1 3 3 3
0	4	0	2 2 2 2
0	3	1	2 2 2 3
0	2	2	2 2 3 3
0	1	3	2 3 3 3
0	0	4	3 3 3 3

$$\overline{C_4^3} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

Varijacije bez ponavljanja

Ako se u svakoj kombinaciji bez ponavljanja elemenata, elementi međusobno permutuju, dobiju se varijacije bez ponavljanja. Broj varijacija bez ponavljanja od n elemenata k-te klase označavamo sa V_k^n i računamo po formuli

$$V_k^n = \binom{n}{k}\cdot k! = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

\# Napisati sve dvocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, 3, 4 i 5 tako da se ni jedna od ovih cifri u napisanom broju ne ponovi.

Rj.

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

$$V_2^5 = \binom{5}{2}\cdot 2! = 5\cdot 4 = 20$$

(#) Napisati sve moguće riječi, koje ne moraju imati nikakvog smisla i značenja, koje se mogu formirati od slova E, K, C i R tako da se svako od ovih slova može pojaviti najviše jednom u napisanoj riječi i da je svaka napisana riječ dužine 3 slova.

Rj.

EKC	KEC	CEK	REK
EKR	KER	CER	REC
ECK	KCE	CKR	RKE
EKC	KCR	CKE	RKC
ERK	KRC	CRE	RCE
ERC	KRE	CRK	RCK

$$V_3^4 = \binom{4}{3} \cdot 3! = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 24$$

Varijacije sa ponavljanjem

Ako se varijacije elemenata mogu i ponavljati onda se dobiju varijacije sa ponavljanjem. Broj varijacija sa ponavljanjem od n elemenata k-te klase označavamo sa $\overline{V_k^n}$ i računamo po formuli:

$$\overline{V_k^n} = n^k$$

(#) Napisati sve dvocifrene brojeve koji se mogu formirati od cifri 1, 2, 3 i 4.

Rj.

11	21	31	41
12	22	32	42
13	23	33	43
14	24	34	44

$$\overline{V_2^4} = 4^2 = 16$$

Date su cifre 3, 4, 5, 6 i 8. Koliko se neparnih trocifrenih brojeva može načiniti od tih cifara?

Rj: Kako se traži neparan trocifren broj, cifra jedinice može biti samo 3 ili 5.

$\square\square\,3$

$\square\square\,5$

ove dvojke predstavljaju cifre stotica i desetica

Cifre desetica i stotica mogu biti bilo koja od datih cifri, pa je broj mogućih dvojki $\square\square$ jednak

$$\overline{V}_2^{\,5} = 5^2 = 25$$

Kada se ovim dvojkama doda cifra jedinice, koja može biti 3 ili 5 dobićemo neparne trocifrene brojeve kojih ima ukupno

$$2 \cdot \overline{V}_2^{\,5} = 2 \cdot 25 = 50$$

Moguće je formirati 50 različitih neparnih trocifrenih brojeva od datih cifara.

Sljedećih 12 zadataka koji slijede (zadaci [10]-[21]) su posuđeni iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine